Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике

11 класс, 19 марта 2017 г.

$+$ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

1. На доске было выписано несколько чисел, их среднее арифметическое было равно M. К ним дописали число 15, при этом среднее арифметическое выросло до $M+2$. После этого дописали ещё и число 1, и среднее арифметическое уменьшилось до $M+1$. Сколько чисел было на доске изначально? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ: 4.

Пусть в изначальном списке было k чисел с суммой S. Тогда по условию

$$\frac{S+15}{k+1} - \frac{S}{k} = 2\,, \quad \frac{S+15}{k+1} - \frac{S+16}{k+2} = 1\,.$$

Приводя к общему знаменателю и преобразуя очевидным образом, получаем, что эти равенства равносильны следующим двум:

$$15k - S = 2k(k+1)\,, \quad S - k + 14 = (k+1)(k+2)\,.$$

Складывая их, приходим к уравнению на k:

$$14(k+1) = (k+1)(2k+k+2)\,,$$

откуда $k=4$. $\square$

$\mp$ Выписана правильная система уравнений, но решена неправильно. 3 балла

$-\!\!\cdot$ Одно из уравнений получено правильно, второе неправильно. 2 балла

$-\!\!\cdot$ Правильный ответ без обоснования. (Пример списка из четырех чисел, удовлетворяющих условию, обоснованием не считается.) 1 балл

2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\sqrt{3}?$$

Ответ: 6.

Сделаем замену $x/(1+x+x^2)=t$.

Сначала исследуем выражение $x/(1+x+x^2)$. Найдем количество решений уравнения

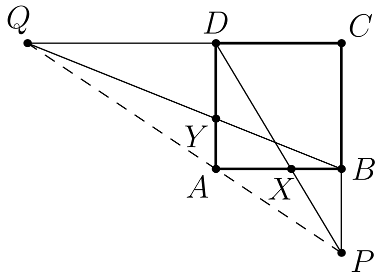
$$\frac{x}{1+x+x^2}=t$$

при различных значениях параметра t. Так как знаменатель всегда положителен, на него можно домножить и получить уравнение $tx^2+(t-1)x+1=0$. При $t=0$ единственное решение $x=0$; при остальных t это уравнение квадратное. Дискриминант его равен $(t-1)^2-4t^2=1-2t-3t^2=(1-3t)(1+t)$. Значит, решения x существуют только при $t\in[-1;1/3]$, причем в множестве $t\in(-1;0)\cup(0;1/3)$ решений ровно два, причем разным t соответствуют разные решения (t выражается через x).

Теперь вернемся к исходному уравнению $\operatorname{tg}(2\pi t)=\sqrt{3}$. Оно эквивалентно $2\pi t=\pi/3+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. На отрезке $t\in[-1;1/3]$ решений всего три: $t=-5/6,-1/3,1/6$. Каждому из них соответствуют по два решения x. □

- $+$ В решении есть арифметическая ошибка, не повлиявшая ни на ход решения, ни на ответ. 6 баллов
- $-$ Потерян один корень уравнения $\operatorname{tg}2\pi t=\sqrt{3}$. 2 балла
- $-$ Потеряно два корня уравнения $\operatorname{tg}2\pi t=\sqrt{3}$. 1 балл
- $-$ Правильный ответ без правильного обоснования. 1 балл

3. На сторонах AB, AD квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y так, что $AX = DY$. Прямые BC и DX пересекаются в точке P, прямые CD и BY — в точке Q. Докажите, что точки P, Q, A лежат на одной прямой.



Из подобия треугольников XAD и XBP получаем $BP : AD = XB : XA$, а из подобия YAB и YDQ получаем $AB : DQ = YA : YD$. Так как $YD = XA$ и $YA = XB$, то $BP : AD = AB : DQ$, что эквивалентно $BP : AB = AD : DQ$. А это означает подобие прямоугольных треугольников ABP и QDA, из которого следует

$$\angle QAP = \angle QAD + \angle DAB + \angle BAP = \angle APB + 90^\circ + \angle BAP = 180^\circ\,,$$

что и требовалось. □

$\mp$ Доказано подобие треугольников ABP и QDA, но решение по каким-то причинам не закончено. 3 балла

$-\!\!\!\!\cdot$ Задача сведена к доказательству подобия треугольников ABP и QDA, но подобие не доказано. 1 балл

$-$ Счетное решение, не увенчавшееся успехом. 0 баллов

4. Каждый день более половины жителей Цветочного города едят мороженое. Докажите, что найдется 10 жителей Цветочного города, таких что в течение каждого из последних 2017 дней хотя бы один из них ел мороженое. (В Цветочном городе живет не менее 10 жителей.)

Поскольку в каждый из 2017 дней более половины жителей Цветочного города ели мороженое, то есть человек, который ел мороженое более чем в половине из этих 2017 дней, то есть в хотя бы 1009. Возьмем его в искомую десятку. Осталось не более 1008 дней. Проделаем ту же процедуру: найдем человека, который ел мороженое более чем в половине из этих 1008 дней (хотя бы в 505), возьмем его в качестве второго человека из искомой десятки. Осталось не более 503 дней. Продолжим в том же духе. После выбора 3-го человека останется не более 251 дня, после выбора 4-го — не более 125 дней, после выбора 5-го — не более 62, после выбора 6-го — не более 30, после выбора 7-го — не более 14, после выбора 8-го — не более 6, после выбора 9-го не более 2. Для оставшихся двух дней существует человек, который ел мороженое более чем в половине из этих двух дней, то есть в оба. Возьмем его 10-м. □

$\pm$ В целом правильное решение из-за неаккуратности привело к тому, что реально найдено 11 человек, а не 10. 5 баллов

$\mp$ Есть ключевое соображение: для любого набора дней найдется человек, евший мороженое более чем в половине из них. Не менее 3 баллов

$\dot{-}$ Доказано содержательное утверждение, которое обеспечивает больше 11 жителей, удовлетворяющих условию. 1-2 балла

5. Пусть d_1, d_2, …, d_n — это все натуральные делители числа $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{10!}} + \ldots + \frac{1}{d_n + \sqrt{10!}}\,.$$

Ответ: $3/(16\sqrt{7})$.

Обозначим указанную сумму за S. Тогда, так как для каждого d_j число $10!/d_j$ — также делитель,

$$S = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{10!/d_j + \sqrt{10!}} = \frac{1}{\sqrt{10!}} \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{\sqrt{10!} + d_j}\,.$$

Следовательно, складывая исходное и последнее выражение для S, умноженные на $\sqrt{10!}$, получаем

$$\sqrt{10!}S + \sqrt{10!}S = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{10!}}{d_j + \sqrt{10!}} + \frac{d_j}{d_j + \sqrt{10!}} \right) = n\,.$$

При этом n — количество делителей числа $10!$ — вычисляется по формуле $n = (8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270$ ($10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$, каждый из простых множителей может входить в делитель в любой степени от 0 до своей степени вхождения в число $10!$). Таким образом, $S = 270/(2\sqrt{10!})$. $\square$

Примечание: $d(10!)$ — это количество делителей числа $10!$.

$\pm$ Ответ не вычислен, а выражен через $d(10!)$. 5 баллов

$\pm$ Уравнение составлено правильно, но есть арифметическая ошибка при вычислении ответа (например, при вычислении $d(10!)$). 5 баллов

$\mp$ В решении присутствует идея составления уравнения для S, но из-за арифметических ошибок уравнение составлено неправильно. 3 балла

$-\!\!\!\cdot$ В решении присутствует идея разбивать слагаемые на пары (первое с последним, второе с предпоследним и т.д), но дальнейшее продвижение отсутствует. 2 балла

$-\!\!\!\cdot$ В решении вычислено $d(10!)$. 1 балл

6. Пусть A и B — различные точки, принадлежащие линии пересечения перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2. Точка C принадлежит плоскости π_2, но не принадлежит π_1. Обозначим через P точку пересечения биссектрисы угла ACB с прямой AB и через ω окружность с диаметром AB в плоскости π_1. Плоскость π_3, содержащая CP, пересекает окружность ω в точках D и E. Докажите, что CP — биссектриса угла DCE.

Рассмотрим сферу Ω, проходящую через точку C и окружность ω. Плоскость π_2 пересекает эту сферу по большой окружности ω_2, описанной около треугольника ABC. (*Большая окружность* — это сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы.) Биссектриса CP треугольника ABC пересекает окружность ω_2 в точке F — середине дуги AB. Поскольку ω_2 является большой окружностью, точка F — центр «шапочки», отсекаемой от сферы Ω плоскостью π_1. Плоскость π_3 проходит через точку F, и дуга DE, лежащая в плоскости π на указанной шапочке, из соображений симметрии делится точкой F пополам. Следовательно, прямая CF, а вместе с ней и CP, является биссектрисой угла DCE. $\square$

$\mp$ В работе фигурирует сфера Ω, но решение не закончено. Не менее 2 баллов

$-$ Не доведенное до конца счетное решение. 0 баллов