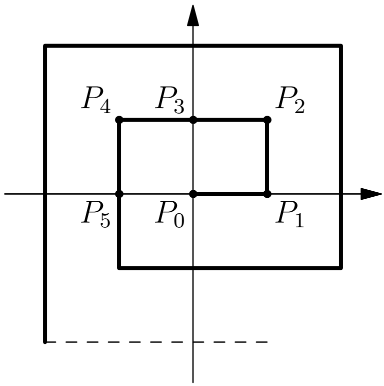
Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике
10 класс, 19 марта 2017 г.

$+$ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

10 класс

1. Муравей Андрюша двигается по координатной плоскости, стартуя из точки $P_0 = (0,0)$, двигаясь к точке $P_1 = (1,0)$, и далее по спирали против часовой стрелки (рис.).



Точки с целочисленными координатами, в которые он попадает, образуют последовательность P_n. Найдите координаты точки P_{2017}.

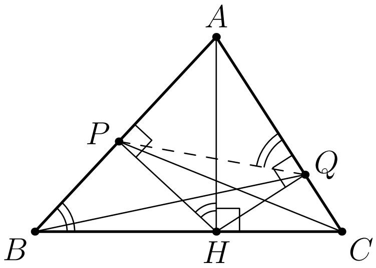
Ответ: $(15, -22)$. Рассмотрим точки, которые являются правыми нижними и левыми верхними углами ломаной, то есть точки вида $(k, 1-k)$ и $(-k, k)$. Легко видеть, что это точки P_1, P_4, P_9, и т. д. Действительно, расстояние от точки $(k, 1-k)$ до $(-k, k)$ по ломаной составляет $4k-1$, что есть разность между $(2k)^2$ и $(2k-1)^2$. Аналогично, расстояние от $(-k, k)$ до $(k+1, -k)$ равно $4k+1$, что есть разность между $(2k+1)^2$ и $(2k)^2$. По индукции получаем, что $P_{(2k-1)^2} = (k, 1-k)$ и $P_{(2k)^2} = (-k, k)$.

Заметим, что $(2 \cdot 23 - 1)^2 = 2025$. Значит, точка P_{2025} имеет координаты $(23, -22)$. Точка P_{2017} на 8 правее ее, то есть имеет координаты $(15, -22)$. $\square$

$\pm$ Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 4-5 баллов

$\mp$ Правильный ответ без объяснения. 1 балл

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $\angle BQH = \angle CPH$.



Так как точки P и Q лежат на окружности, построенной на AH как на диаметре, равны углы $\angle PQA = \angle PHA$ как вписанные. С другой стороны, углы $\angle PHA$ и $\angle HBA$ равны, так как они оба дополняют угол BAH до прямого. Углы $\angle AQP$ и $\angle ABC$ равны, а значит, четырехугольник $BPQC$ можно вписать в окружность. Тогда равны и углы $\angle BPC$ и $\angle BQC$ как вписанные. Искомое равенство получается, если из каждого из них вычесть $90°$. $\square$

$\mp$ Доказана вписанность четырехугольника $BPQC$, решение не закончено. 3 балла

$-.$ Доказана вписанность четырехугольника $APHQ$. 1 балл

3. Найдите наименьшее возможное число k такое, что при выборе любых k различных чисел от 1 до 20, среди выбранных чисел гарантированно можно выделить пару различных с простой суммой.

Ответ: $k = 11$.

Очевидно, что 10 чисел недостаточно — можно выбрать все четные числа и сумма любых двух будет четной, большей двух. Покажем, что при выборе любых 11 чисел найдется пара с простой суммой. Для этого разобьем все числа на пары

$$\{1,2\}, \{3,8\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{9,14\}, \{10,13\},$$
$$\{11,12\}, \{15,16\}, \{17,20\}, \{18,19\}.$$

В каждой паре сумма чисел простая. При выборе 11 чисел какая-то из пар будет выбрана целиком. $\square$

$+.$ Доказано, что 10 чисел недостаточно и что среди 12–13 чисел есть нужная пара. 5 баллов

$\pm$ Доказано, что среди 11 чисел такая пара найдется. 4 балла

$\mp$ Доказано, что 10 чисел не достаточно. 3 балла

$-.$ Доказано, что среди 12–13 чисел есть нужная пара. 2 балла

$-.$ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. Найдите все натуральные n такие, что число $8^n + n$ делится на $2^n + n$.

Ответ: $n = 1, 2, 4, 6$.

По формуле сокращенного умножения число $8^n + n^3$ делится на $2^n + n$, поэтому условие задачи равносильно условию $n^3 - n \vdots 2^n + n$. Но при $n \geqslant 10$ верно неравенство $n^3 < 2^n$. Осталось перебрать 9 вариантов и получить ответ. $\square$

$+$ За использование неравенства $n^3 < 2^n$ при $n \geqslant 10$ без доказательства баллы не снижаются.

$\pm$ Правильный ход решения, но потеряны ответы. Снимать по одному баллу за каждый потерянный ответ.

$\mp$ Установлено, что $n^3 - n \vdots 2^n + n$ или аналогичная делимость, где делимое обычно меньше делителя. 3 балла

$\underset{\bullet}{-}$ Найдены все ответы без обоснования. 1 балл

5. Куб со стороной 5 сложен из 125 кубиков со стороной 1. Сколько маленьких кубиков пересекает плоскость, перпендикулярная одной из диагоналей куба и проходящая через ее середину?

Ответ: 55.

Введем систему координат так, чтоб куб располагался в первом октанте (множестве точек с неотрицательными координатами) и упомянутая в условии диагональ выходила из начала координат O. Середина диагонали куба имеет координаты $(5/2, 5/2, 5/2)$, следовательно, указанная плоскость задается уравнением $x + y + z = 15/2$. Рассмотрим один из 125 кубиков. Пусть ближняя к точке O вершина имеет координаты (k, m, n), где целые числа k, m, n удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant k, m, n \leqslant 4$. Дальняя от точки O вершина имеет координаты $(k+1, m+1, n+1)$. Таким образом, кубик пересекает плоскость в том и только в том случае, если $k + m + n \leqslant 15/2 \leqslant k + 1 + m + 1 + n + 1$, что эквивалентно условию $k + m + n \in (9/2; 15/2)$. Принимая во внимание целочисленность суммы $k + m + n$, получаем лишь три варианта: $k + m + n = 5$, $k + m + n = 6$ или $k + m + n = 7$. Вычислим количество кубиков каждого из трех типов.

(i) $k + m + n = 5$. Перечислим способы разбить 5 на три слагаемых, и укажем количество различных перестановок этих слагаемых: $0 + 1 + 4$ (6 решений), $0 + 2 + 3$ (6 решений), $1 + 1 + 3$ (3 решения), $1 + 2 + 2$ (3 решения) — всего 18.

(ii) $k + m + n = 6$. $0 + 2 + 4$ (6 решений), $0 + 3 + 3$ (3 решения), $1 + 1 + 4$ (3 решения), $1 + 2 + 3$ (6 решений), $2 + 2 + 2$ (1 решение) — всего 19.

(iii) $k + m + n = 7$. Все такие кубики симметричны аналогичным с условием $k + m + n = 5$ относительно центра куба — всего 18.

Итого: $18 + 19 + 18 = 55$. $\square$

- $\dotplus$ Пересекаемые кубики разбиты на три слоя и хотя бы в двух из слоев правильно вычислено с обоснованием количество кубиков. 6 баллов
- $\pm$ Пересекаемые кубики разбиты на три слоя и хотя бы в одном из слоев правильно вычислено с обоснованием количество кубиков. 5 баллов
- $\pm$ Пересекаемые кубики разбиты на три слоя и хотя бы в одном из слоев правильно вычислено количество кубиков, но обоснование не строгое или отсутствует. 4 балла
- $\mp$ Пересекаемые кубики разбиты на три слоя, но дальнейших продвижений нет. 3 балла
- $\underset{\bullet}{-}$ Приведен правильный ответ без обоснования. 2 балла
- $\underset{\bullet}{-}$ Выписано уравнение плоскости. 1 балл