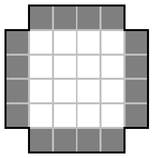
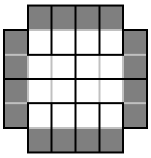
Финал, 2016 год

6 класс

1. Разрежьте фигуру на рисунке на 12 частей по границам клеток так, чтобы в каждой части темных и светлых клеток было поровну. (Части могут быть не одинаковы)





Ответ. Например, так.

Критерий. Любой верный рисунок – 7 баллов.

2. Маша и медведь съели корзину малины и 40 пирожков, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела малину, а медведь – пирожки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Медведь ел и малину, и пирожки в 3 раза быстрее Маши. Сколько пирожков съела Маша, если малины они съели поровну?

Ответ. 4 пирожка. **Решение.** Медведь съел свою половину малины втрое быстрее Маши. Значит, Маша ела пирожки втрое меньше времени, чем медведь. Поскольку она ест втрое медленнее, то она съела пирожков в 9 раз меньше медведя. Разделив пирожки в отношении 9:1, видим, что Маше досталась 10-я часть, то есть 4 пирожка.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов, с полным обоснованием — 7 баллов.

3. За круглым столом сидят 10 эльфов, перед каждым корзина орехов. Каждого спросили «Сколько орехов у двух твоих соседей вместе?» и, обходя по кругу, получили ответы 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190 и 200. Сколько орехов у эльфа, который ответил 160?

Ответ. 55 . **Решение.** Будем называть эльфов 1-м, 2-м и т. д. в порядке получения ответов. Нечетные номера сидят через одного. В их ответах число орехов каждого четного номера учтено дважды, поэтому сумма 110+130+150+170+190=750 равна удвоенному числу орехов у всех четных номеров. Значит, всего у четных 375 орехов. У 8-го и 10-го вместе 190 орехов, у 2-го и 4-го вместе 130 орехов. Значит, у 6-го 375-190-130=55 орехов.

Критерий. 1 балла за верный ответ без обоснования. 3 балла за ответ и верный пример для всех.

4. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Представьте число 2016 в виде произведения двух палиндромов (найдите все варианты и объясните, почему других нет).

Ответ. $8\cdot 252$. **Решение.** Число 2016 не делится на 11. Поэтому ни один из палиндромов не двузначен (они все делятся на 11). Значит, один из палиндромов однозначен (если в обоих сомножителях не менее 3 знаков, то произведение не меньше чем $100\cdot 100>2016$). У числа 2016 есть только такие однозначные делители: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Им соответствую разложения $1\cdot 2016$, $2\cdot 1008$, $3\cdot 672$, $4\cdot 504$, $6\cdot 336$, $7\cdot 288$, $8\cdot 252$, $9\cdot 224$. Подходит только одно.

Критерий. 2 балла за верный ответ без обоснования. При переборном решении каждый пропущенный вариант дает 2 балла штрафа.

5. 30 учеников идут парами, в каждой паре ученики разного роста. Докажите, что они могут встать в круг так, чтобы рост каждого отличался от роста его соседей.

Решение. Пусть одного из учеников зовут Петя, а всех других учеников Петиного роста назовем Васями. Будем строить ряд слева направо, добавляя пары. Первым поставим Петю с напарником, причем Петя слева. Если есть пара с Васей, ставим её следующей, причем Васю тоже ставим слева. Тогда слева от Васи будет Петин напарник, он отличается ростом от Васи. Точно так же добавляем в ряд все остальные пары с Васями. Когда Васи кончатся, добавляем пары в любом порядке. Ученики в паре разного роста, поэтому хотя бы один из них отличается ростом от самого правого в ряду. Ставим слева отличающегося, а справа — его напарника. В результате любая пара соседей в ряду будет разного роста. Кроме того, самый правый в ряду отличатся ростом от Пети, ведь все Васи ставились слева и не могут быть самыми правыми. Поэтому ряд можно замкнуть в круг.

Критерий. 3 балла, если алгоритм позволяет построить всех в незамкнутый ряд.

7 класс

1. Маша и медведь съели корзину малины и 60 пирожков, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела малину, а медведь – пирожки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Медведь ел малину в 6 раз быстрее Маши, а пирожки — только в 3 раза быстрее. Сколько пирожков съел медведь, если малины медведь он съел вдвое больше Маши?

Ответ. 54 пирожка. **Решение.** Разделим малину на 3 равные части. Каждую часть медведь ел в 6 раз быстрее Маши, но частей две, значит от затратил на малину только в 3 раза меньше времени чем Маша. Значит, Маша ела пирожки втрое меньше времени, чем медведь. Поскольку она ест втрое медленнее, то она съела пирожков в 9 раз меньше медведя. Разделив пирожки в отношении 9:1, видим, что Маше досталась 10-я часть, то есть 6 пирожков. А остальные 54 пирожка достались медведю.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов, с полным обоснованием — 7 баллов.

2. Если у прямоугольника ширину увеличить на 3 см, а высоту уменьшить на 3 см, его площадь не изменится. А как изменится площадь, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 4 см, а высоту увеличить на 4 см?

Ответ. Уменьшится на 28 см^2. **Решение.** Обозначим ширину исходного прямоугольника s, а высоту h. Площадь исходного прямоугольника sh, площадь измененного $(s+3)(h-3)$, что равно $sh+3(h-s)-9$. Ввиду равенства площадей $3(h-s)-9=0$, откуда $h-s=3$. При втором варианте изменения получим площадь $(s-4)(h+4)=sh-4(h-s)-16=sh-4\cdot 3-16=sh-28$. Значит, площадь уменьшится на 28 см^2.

3. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Представьте число 2016 в виде произведения трех палиндромов, больших 1 (найдите все варианты и объясните, почему других нет).

Ответ. $2\cdot 4\cdot 252$. **Решение.** Число 2016 не делится на 11. Поэтому ни один из палиндромов не двузначен (они все делятся на 11). Значит, два из палиндромов однозначны (если в двух сомножителях не менее 3 знаков, то произведение не меньше чем $100\cdot 100>2016$). Произведение однозначных не меньше 4, поэтому третий сомножитель T не больше $2016/4=504$, то есть он трехзначный. Разберем 2 случая. Для этого нам понадобится разложение 2016 на простые множители: $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$.
Случай 1. T<200. Тогда T начинается и заканчивается на 1, то есть он — нечетный. Однако произведение даже всех нечетных простых в разложении 2016 равно только 63, то есть все нечетные делители числа 2016 не трехзначны. Этот случай невозможен.
Случай 2. T≥200. Тогда произведение двух других сомножителей не больше, чем 2016/200, то есть не больше 10. Только 6, 8 и 9 могут быть произведением однозначных делителей числа 2016: $6=2\cdot 3$, $8=2\cdot 4$, $9=3\cdot 3$. Второй вариант подходит, поскольку $2016/8=252$ – палиндром; а вот остальные — нет, так как $2016/6=336$ и $2016/9=224$ – не палиндромы.

Критерий. Верный ответ без обоснований – только 1 балл.

4. Отрезки KL и MN пересекаются в точке T. Известно, что треугольник KNT – равносторонний и KL=MT. Докажите, что треугольник LMN – равнобедренный.

Решение. Отложим на луче TM отрезок TD=TL. Поскольку TD=TL<KL=TM, то точка D лежит на отрезке TM. Поскольку $\angle DTL=\angle MTK=60°$ и DT=TL, то треугольник DTL – равносторонний. Тогда LD=LT, $\angle LDM=\angle LTN=120°$ и MD=MT–DT=KL–TL=KT=NT. Значит, треугольники LDM и LTN равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда LM=LN, то есть, треугольник MLN – равнобедренный.

Критерий. Не менее 2 баллов за построение вспомогательного равносторонниего треугольника DTL.

5. На олимпиаду пришли 300 семиклассников из 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три – из разных школ.

Решение. Соберем учеников из одной школы, и будем отделять от них команды по 3, пока их не останется 0, 1 или 2. Так как исходное количество учеников кратно 3, то поэтому общее количество оставшихся учеников тоже кратно 3. Но всего их не больше 2+2+2+2=8, то есть осталось всего 0, 3 или 6. Забудем про нули, и выпишем все варианты с ненулевыми остатками: 1+2, 1+1+1, 2+2+2 и 1+1+2+2. Разберем эти случаи.
1+1+1) Из трех школ по одному ученику: как раз команда.
2+2+2) Из трех школ по два ученика — сделаем две команды из учеников разных школ. 1+1+2+2) Из школ А и Б по 1 ученику, из школ В и Г — по два. Сделаем две команды из учеников разных школ: АВГ и БВГ.
1+2) Из школы А 1 ученик, из Б — двое. Добавим к ним по команде из школ В и Г (такие есть), и переформируем этих 9 учеников в 3 команды из разных школ: АВГ, БВГ и БВГ.

8 класс

1. Если у прямоугольника ширину увеличить на 30%, а высоту уменьшить на 20%, его периметр не изменится. А уменьшится или увеличится периметр, и на сколько процентов, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 20%, а высоту увеличить на 30%?

Ответ. Увеличится на 10%. **Решение.** Обозначим ширину исходного прямоугольника s, а высоту h. В первом случае измененные ширина и высота будут 1,3s и 0,8h соответственно. По условию 2(s+h)=2(1,3s+0,8h), откуда h=1,5s. Это значит, что исходный периметр равен 2(s+1,5s)=5s. Во втором случае периметр будет 2(0,8s+1,3h) = 2(0,8s+1,3·1,5s)=5,5s. Это число больше 5s на 0,5s, то есть на 10%.

2. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. В треугольниках OAB, OBC, OCD проведены медианы OM, OM', OM” и биссектрисы OL, OL', OL” соответственно. Докажите, что углы MM'M” и LL'L” равны.

Решение. Пусть AB=a, BC=b, OB=c, AO=OC=d. По теореме о биссектрисе BL:AL=BO:AO <=> BL:(a – BL)=c:d <=> BL=ac/(c+d). Аналогично, BL'=bc/(c+d). Значит, BL:BL'=a:b=BA:BC=BM:BM'. Значит, треугольники LBL' и MBM' подобны ввиду совпадения угла B и пропорциональности прилегающих к этому углу сторон. Поэтому LL'||MM'. Аналогично, L'L”||M'M”. Стороны углов MM'M” и LL'L” параллельны и сонаправлены, поэтому эти углы равны.

3. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух палиндромов.

Решение. 2016...2016 = 2016·100010001...01, где единицы перемежаются тройками нулей, и число единиц равно числу групп 2016 в исходном числе. Правое число — палиндром, а левое — нет. Но 2016=252·8 — произведение двух палиндромов. Умножив правое число на один из этих палиндромов, по-прежнему получим палиндром. Отсюда два возможных варианта в общем случае: 25202520...0252·8 или 800080...8·252.

Критерий. За разложение 2016·100010001...01 — один балл. Для полного балла достаточно только одного ответа.

4. На олимпиаду пришли 300 учеников из не менее чем 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три – из разных школ.

Решение. Если из какой школы пришло больше трёх учеников, то отделяем от них команды по три пока возможно. не останется 1, 2 или 3 ученика. Так сделаем со всеми школами. В каждой школе остаток будет 0, 1 или 2 ученика. Поскольку общее число учеников кратно 3, и мы отделяли тройками, сумма остатков тоже кратна 3. Поэтому один ненулевой остаток быть не может. Рассмотрим случаи.
Случай 1. Есть два ненулевых остатка. Это могут быть только 1 и 2 из школ А и Б. Вернем по тройке учеников из двух других школ В и Г, и сформируем смешанные команды: две БВГ и одну АВГ.

Случай 2. Есть три или более ненулевых остатков. Формируем смешанные команды, беря по ученику из тех трех школ, где остатки на данный момент наибольшие. Это означает, что если после взятия где-то остались 2 ученика, то мы брали только из остатков по 2. То есть, если какой-то остаток стал 0, то остальные не больше 1. Рассмотрим теперь момент, когда останется менее трех ненулевых остатков. Но две или одна единица остаться не может (сумма не кратна 3), поэтому все остатки стали 0, то есть, все ученики распределены.
Критерий. 2 балла если сведено к случаю остатков и указано, что сумма остатков кратна 3. 2 балла за верный алгоритм без доказательства, что этот алгоритм всегда работатет. Но если и то, и другое, то не 4 балла, а только 3.

5. Через точку с координатами (2, 2) проведены прямые (включая две параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 18°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 2016 - x$.

Ответ. 10080. **Решение**. Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (2, 2) проведено 10 прямых, прямая $y = 2016 - x$ пересекает их все. Для каждой точки на прямой $y = 2016 - x$ сумма координат равна 2016, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 20160, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

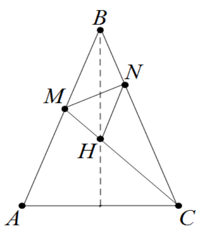
Критерий. 2 балла за верный ответ без верного обоснования. 5 баллов, если все идеи найдены, но ответ неверный из-за неправильного подсчета количества точек пересечения (например, школьник считает что их 9 или 18).

9 класс

1. Известна сумма куба и квадрата некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?
Ответ. Нет, например, числа 1/3 и -2/3 дают одинаковую сумму 4/27.
Критерий. Контрпример 7 баллов. Обоснование не требуется.

2. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух палиндромов.
Решение. См. 8-3.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC. На боковой стороне AB отметили такую точку M, что $CM=AC$. Затем на боковой стороне BC отметили такую точку N, что $BN=MN$, и провели биссектрису NH в треугольнике CNM. Докажите, что H лежит на медиане BK треугольника ABC.



Решение. В равнобедренных треугольниках ACM и MNB $\angle AMC = \angle A$ и $\angle BMN = \angle B$. Значит, $\angle CMN = 180° - \angle AMC - \angle BMN = 180° - \angle A - \angle B = \angle C = \angle A = \angle AMC$. Таким образом, H является точкой пересечения биссектрис углов AMN и MNC. Поэтому расстояние от H до прямой MN равно расстояниям от H до прямых AB и BC соответственно. Итак, точка H равноудалена от прямых AB и BC, значит, BH – биссектриса угла ABC. А поскольку треугольник равнобедренный, то биссектриса совпадает с медианой.

4. Через точку с координатами (9, 9) проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 9°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 10 - x$.

Ответ. 190. **Решение.** Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (9, 9) проведено 20 прямых, прямая $y = 20 - x$ пересекает 19 из них. Для каждой точки на прямой $y = 20 - x$ сумма координат равна 20, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 380, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

Критерий. 2 балла за верный ответ без верного обоснования. 4 балла, если все идеи найдены, но ответ неверный из-за неправильного подсчета количества точек пересечения (например, школьник считает что их 20 или 40).

5. Есть 64 шашки трех цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.

Решение. Разложим шашки на три одноцветные кучки. В каждой будет не более 32 шашек. Разложим теперь самую большую кучку на белые поля, заполняя горизонтали начиная сверху. Вторую по величине кучку разложим на черные поля, заполняя горизонтали начиная снизу.

Назовем ряд *полным*, если в него попали 4 шашки из 1-й кучки или 4 шашки из второй кучки.

Из первой кучки не более 3 шашек не попадут в полный ряд, и из второй кучки — тоже не более 3. Но всего в этих двух кучках — более 2/3 всех шашек, то есть не менее 43. Значит, не менее 43-6=37 шашек — в полных рядах. Тогда полных рядов — не менее 9. Но всего рядов 8, значит, есть особый ряд, куда попали по 4 шашки из обеих кучек. Свободные поля разных цветов лежат по разные стороны особого ряда, и между собой не соприкасаются. Разложим на них шашки третьей кучки.

10 класс

1. Известна сумма четвертой и пятой степени некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

Ответ. Нет. Исследование графика $f(x)=x^4+x^5$ показывает, что она непрерывна, возрастает при $x<-0{,}8$ и $x>0$, убывает при $-0{,}8<x<0$. Соответственно, $f(-0{,}8)=0{,}08192$ – локальный максимум, $f(0)=0$ – локальный минимум. При $0\le x\le 1$ функция принимает все значения от 0 до 2, в том числе и значение 0,08192. Оно, очевидно, принимается при нецелом x. Итак, значение 0,08192 принимается как при нецелом отрицательном числе -0,8, так и при некотором нецелом полодительном числе. Значит, по значению знак определить нельзя!

Критерий. 5 баллов, если объяснено, что при некотором a уравнение $x^4+x^5=a$ имеет как положительный, так и отрицательный корень, но не доказано, что оба корня не целые.

2. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух неоднозначных палиндромов.

Решение. 2016...2016 = 2016·100010001...01, где единицы перемежаются тройками нулей, и число единиц равно числу групп 2016 в исходном числе. Правое число — палиндром, а левое — нет. Но 2016=252·8 — произведение двух палиндромов. Умножив правое число на 8, по-прежнему получим палиндром. Отсюда пример: 800080...8·252.

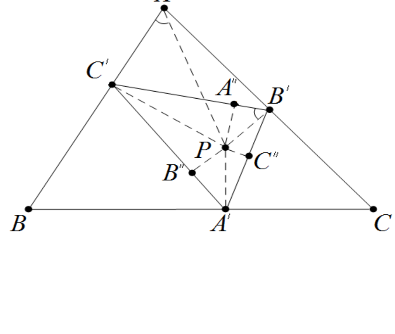
Критерий. За разложение 2016·100010001...01 — один балл.

3. Дан треугольник ABC . Из точки P внутри него опущены перпендикуляры PA', PB', PC' на стороны BC, CA, AB соответственно. Затем из точки P опущены перпендикуляры PA'', PB'' на стороны $B'C'$ и $C'A'$ соответственно. Докажите, что

$PA\cdot PA'\cdot PA'' = PB\cdot PB'\cdot PB''$.

Решение. Поскольку углы $PB'A$ и $PC'A$ – прямые, то четырёхугольник $PB'AC'$ вписан в окружность с диаметром PA, откуда $\angle PB'C' = \angle PAC'$. Поэтому прямоугольные треугольники $PB'A''$ и PAC' подобны и PB':PA=PA'':PC'. Это равносильно $PB'\cdot PC'=PA\cdot PA''$. Домножив обе части на PA', получим равенство

$PA\cdot PA'\cdot PA'' = PA'\cdot PB'\cdot PC'$. Аналогично доказывается, что $PB\cdot PB'\cdot PB'' = PA'\cdot PB'\cdot PC'$. Из этих двух равенств и следует равенство $PA\cdot PA'\cdot PA'' = PB\cdot PB'\cdot PB''$.



4. Через точку с координатами (10, 9) проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 10°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 101 - x$.

Ответ. 867. **Решение**. Сдвинем всю картинку на 1 влево. Получим набор прямых, проходящих через точку (9, 9) и пересекающих прямую $y = 100 - x$. Картинка станет симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому на ней сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (9, 9) проведено 18 прямых, прямая $y = 100 - x$ пересекает 17 из них. Для каждой точки на прямой $y = 100 - x$ сумма координат равна 100, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 1700, а сумма абсцисс – вдвое меньше, то есть 850. Однако на симметричной картинке каждая абсцисса на 1 меньше исходной, то есть искомая сумма равна 850+17=867.

Критерий. Не менее 1 балла за верный ответ без верного обоснования. 1 балл за идею сдвинуть картинку так, чтобы она стала симметричной относительно осей. 5 баллов, если все идеи найдены, но ответ неверный из-за неправильного подсчета количества точек пересечения (например, школьник считает что их 18 или 36).

5. Есть 64 шашки нескольких цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.

Решение. Разложим шашки на кучки по цветам.

Случай 1) Кучек две. Тогда шашек в них поровну. Разложим один цвет на белые поля, а второй — на черные.

Случай 2) Кучек 3. В каждой будет не более 32 шашек. Разложим теперь самую большую кучку на белые поля, заполняя горизонтали начиная сверху. Вторую по величине кучку разложим на черные поля, заполняя горизонтали начиная снизу.

Назовем ряд *полным*, если в него попали 4 шашки из 1-й кучки или 4 шашки из второй кучки.

Из первой кучки не более 3 шашек не попадут в полный ряд, и из второй кучки — тоже не более 3. Но всего в этих двух кучках — более 2/3 всех шашек, то есть не менее 43. Значит, не менее 43-6=37 шашек — в полных рядах. Тогда полных рядов — не менее 9. Но всего рядов 8, значит, есть особый ряд, куда попали по 4 шашки из обеих кучек. Свободные поля разных цветов лежат по разные стороны особого ряда, и между собой не соприкасаются. Разложим на них шашки третьей кучки.

Случай 3). Кучек больше 3. Сольем две самые маленькие кучки в одну. В них вместе не больше шашек, чем в двух самых бошьих, то есть в полученной кучке не более 32 шашек. Если куч больше 3, снова сольем две самые маленькие. Так будем продолжать, пока не останется ровно 3 кучки. Далее раскладываем как в случае 3 куч.

Критерий. 0 баллов за разбор только случая 2 цветов. 4 балла за разбор случая 3 цветов без дальнейших продвижений.

11 класс

1. У двух прямоугольных треугольников совпадают площади и периметры. Обязательно ли эти треугольники равны?

Ответ. Да. **Решение.** Пусть a и b – катеты треугольника, P – его периметр, S – площадь. Тогда ab/2=S и $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=P$. Перенеся во втором равенстве a и b в правую часть и возведя в квадрат, получим $a+b=\frac{P^2+4S}{2P}$. Но зная сумму и произведение чисел a и b, мы можем найти их как корни квадратного уравнения с соответствующими коэффициентами. По заданным площади и периметру коэффициенты определяются однозначно. Значит, катеты тоже определяются однозначно, и треугольники равны.

2. Найдите наименьшее натуральное n такое, что $\sin n^\circ = \sin (2016n^\circ)$.
Ответ. 72. **Решение.** $\sin A=\sin B \Leftrightarrow$ 1) $B-A=360k^\circ$ или 2) $A+B=180^\circ+360k^\circ$, где k – целое. У нас $A=n^\circ$, $B=2017n^\circ$.
Случай 1. $2015n=360k \Leftrightarrow 403n=72k$. Поскольку 403 и 72 взаимно просты, то n кратно 72. Значит, наименьшее n=72.
Случай 2. $2017n=180(2k+1)$. 2017n кратно 180. Поскольку 2017 и 180 взаимно просты, то n кратно 180. Значит, наименьшее n=180.
Критерий. Разобран только один случай, но ответ верный: 3 балла. Разобран случай, дающий ответ 180: 1 балл.

3. Имеется 288 внешне одинаковых монет весами 7 и 8 грамм (есть и те, и другие). На чаши весов положили по 144 монеты так, что весы в равновесии. За одну операцию можно взять с чаш любые две группы из одинакового числа монет и поменять их местами. Докажите, что можно не более, чем за 11 операций сделать так, чтобы весы *не были* в равновесии.

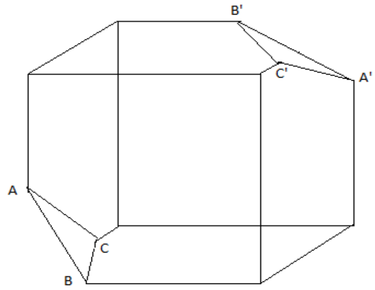
Решение. Будем менять группы монет с разных чаш. Пусть у нас при каждой из следующих замен равновесие сохраняется. Поменяем по одной монете. Они одинаковы. Поменяем одну из этих монет с новой. Теперь три монеты одинаковы: пара на одной и одна — на другой чаше. Поменяем эту пару с парой еще нетронутых. Теперь на одной чаше пара одинаковых, на другой — тройка таких же монет. Поменяем тройку с тройкой нетронутых. Теперь на одной чаше тройка одинаковых монет, на другой — пять таких же монет. Продолжая в том же духе, после k-го шага получим на одной чаше Φ_k одинаковых монет, а на другой — Φ_{k+1} таких же монет, где Φ_i — i-ое число Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Итак, после 11-го шага на одной из чаш все монеты одинаковы. Но тогда они таковы же и на другой, что по условию невозможно.

Критерий. Если алгоритм указан верно, найдено соображение с числами Фибоначчи, но неверный ответ из-за ошибки в подсчетах (например, получилось что хватит 10 шагов) — оценить решение в 4 балла.

4. Назовем натуральное число *модным*, если в его записи встречается группа цифр 2016 (например, числа 32016, 1120165 модны, а 3, 216, 20516 — нет). Докажите, что всякое натуральное число можно получить как частное от деления модного числа на модное.

Решение. Пусть надо получить k-значное число N. Среди 10^k чисел от 20160...0 (k нулей) до 20169...9 (k девяток) хотя бы одно делится на N. Обозначим его A, а A/N=B. Пусть число C=2016N – m-значно. Припишем к B справа m-4 нуля и 2016, получим делитель D — модное число. Произведение D·N записывается как A, к которому справа приписано число 2016N, это тоже модное число. Итак, N – отношение двух модных.

5. У куба выбрали две противоположные вершины M и M' и плоскими сечениями ABC и A'B'C' отрезали от него две треугольные пирамиды MABC и M'A'B'C'. Получился восьмигранник (см. рис.) Три расстояния оказались попарно различны: между прямыми AB и A'B', между прямыми BC и B'C' и между прямыми AC и A'C'. Докажите, что у прямых AA', BB' и CC' есть общая точка.



Решение. Пусть r – длина ребра куба. Каждая из пар прямых лежит на двух противоположных гранях куба. Через них проходят параллельные плоскости на расстоянии r друг от друга. Если эти прямые не параллельны, то они скрещиваются; в таком случае проходящая через них пара параллельных плоскостей определяется однозначно, и расстояние между прямыми равно расстоянию между плосокостями, то есть r. По условию, по крайней мере два расстояния не равны r, то есть в двух парах прямые параллельны (скажем AB||A'B', AC||A'C'). Тогда по признаку параллельности плоскостей параллельны плоскости ABC и A'B'C'. Но тогда параллельны между собой и прямые BC и B'C'. Иначе получилось бы, что через пару скрещивающихся прямых BC и B'C' проходят две пары параллельных плоскостей: пара противоположных граней и пара ABC и A'B'C'. А такое невозможно.

Итак, все три пары состоят из параллельных прямых. Значит, прямые AB и A'B' лежат в одной плоскости и имеют общую точку X, прямые BC и B'C' лежат в одной плоскости и имеют общую точку Y и, наконец, прямые AC и A'C' лежат в одной плоскости и имеют общую точку Z. Но, если среди этих точек есть различные, то все три точки различны, и все три прямые лежат в одной плоскости XYZ, что неверно. Значит, все эти прямые проходят через одну точку.

Критерий. За доказательство параллельности плоскостей ABC и A'B'C' – не менее 3 баллов.

6. Дан квадратный трехчлен x^2+bx+c. Докажите, что найдется такое иррациональное x, при котором значение x^2+bx+c – рационально.

Решение. Обозначим $P(x)=x^2+bx+c$. Выберем достаточно большое рациональное число r, чтобы у $P(x)–r$ были два корня: x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета $P(x)–r = (x–x_1)(x–x_2)$. Если хотя бы один из корней – иррационален (скажем, x_1), то $P(x_1)=r$ – рационально, то есть x_1 – искомое. Пусть оба корня – рациональны. Тогда $P(x)–r = (x–x_3)^2+d$, где x_3 и d – рациональны. Подставив иррациональное число $x=x_3+\sqrt{2}$, получим $P(x) = 2+d+r$ – рациональное.