7 класс

Задача 1

Автор

Трушников Н.Д.

Условие

Оцените максимальную длину следа, который твердый "простой" карандаш может оставить на бумаге, если известно, что грифель является цилиндром радиусом 1 мм и высотой 20 см, а толщина следа постоянна и равна 6 нм.

Примечание: объём *V* цилиндра рассчитывается по формуле $V = \pi r^2 h$, где r — радиус цилиндра, h — его высота, $\pi \approx 3{,}14$.

Решение

Максимальная длина следа достигается, если исписать весь карандаш, не отрывая его от бумаги. В таком случае исходная масса грифеля будет равна массе графита, оставшегося в виде следа на бумаге. Поскольку при письме плотность вещества грифеля не меняется, то объём грифеля равен объему следа. Объём грифеля – это площадь его поперечного сечения, умноженная на высоту. Объём следа – это ширина следа (диаметр грифеля), умноженная на толщину следа, умноженная на длину следа.

Пусть $r_{\text{грифеля}}$, $h_{\text{грифеля}}$, $\delta_{\text{слоя}}$, $L_{\text{слоя}}$ – радиус грифеля, высота грифеля, толщина следа и длина следа соответственно. Тогда:

$$\pi {r_{\text{грифеля}}}^2 h_{\text{грифеля}} = 2 r_{\text{грифеля}} \delta_{\text{слоя}} L_{\text{слоя}},$$

откуда:

$$L_{\text{слоя}} = \frac{\pi r_{\text{грифеля}} h_{\text{грифеля}}}{2\delta_{\text{слоя}}} = \frac{\pi \cdot 0{,}001 \ \cdot 0{,}2}{2 \ \cdot 0{,}000000006} \text{ м } \approx 52{,}3 \text{ км}.$$

Критерии оценивания

Указано, что объём грифеля равен объёму оставшегося на бумаге следа...............................2 балла
Записано выражение для объёма следа ....3 балла
Получен правильный ответ...5 баллов
При ошибке в вычислениях - снимается 3 балла.

Задача 2

Автор

Паринов Д.А.

Условие

Ахиллес преследует черепаху. В момент начала движения черепаха находится на 1000 шагов впереди Ахиллеса, а затем ползёт от Ахиллеса по прямой с постоянной скоростью. Ахиллес пробегает первые 1000 шагов с постоянной скоростью 200 шагов в минуту и видит, что черепаха за это время уползла на 100 шагов. Поняв, что так дело не пойдёт, Ахиллес ускоряется, и всё-таки настигает черепаху. Весь забег длится 5 минут 15 секунд. Чему равна средняя скорость Ахиллеса за всё время забега?

Решение

За время, пока Ахиллес пробежал 1000 шагов, черепаха проползла 100. Значит, её скорость равна 20 шагов в минуту. За всё время забега (5,25 мин) черепаха проползла

$$20\ \frac{\text{шагов}}{\text{мин}} \cdot 5{,}25 \text{ мин} = 105 \text{ шагов},$$

а Ахиллес на 1000 шагов больше, то есть 1105 шагов. Его средняя скорость

$$\frac{1105\ \text{шагов}}{5{,}25\ \text{мин}} \approx 210\ \frac{\text{шагов}}{\text{мин}}.$$

Критерии оценивания

Найдена скорость черепахи .... 2 балла
Найден путь, пройденный Ахиллесом .... 5 баллов
Получен ответ .... 3 балла

Задача 3

Автор

Е.Дубровина, М.В.Варламова

Условие

Рост отличника Васи 1 м 60 см, его масса 55 кг. За особые успехи в олимпиаде по физике директор школы решил изготовить статуэтку высотой 20 см, которая будет являться точной копией Васи. Первоначально статуэтку планировали сделать из золота, но так как золота оказалось недостаточное количество, решили добавить серебро. Какую часть (в процентах) общей массы статуэтки составило серебро, если масса фигурки оказалась равной 1400 г? Так как человек на 80 % состоит из воды, то можно считать плотность Васи примерно равной плотности воды. Плотность золота 19,3 г/см^3, плотность серебра 10,5 г/см^3.

Решение

Высота статуэтки в $k = \frac{160\ \text{см}}{20\ \text{см}} = 8$ раз меньше роста Васи. Значит, объём статуэтки в $k^3 = 512$ раз меньше объёма Васи. Объём отличника рассчитаем, зная его плотность и массу:

$$V_1 = \frac{55\ \text{кг}}{1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 0{,}055\ \text{м}^3 = 55\ \text{дм}^3.$$

Значит, объём статуэтки

$$V_2 = \frac{V_1}{k^3} = 0{,}107\ \text{дм}^3 \approx 107\ \text{см}^3.$$

Если бы статуэтка была полностью золотая, её масса была бы равна

$$M = 19{,}3\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 107\ \text{см}^3 \approx 2065\ \text{г},$$

что больше, чем действительная масса статуэтки m, за счёт того, что серебро имеет плотность на $19{,}3\frac{\text{г}}{\text{см}^3} - 10{,}5\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 8{,}8\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ меньше плотности золота. Значит, объём содержащегося в статуэтке серебра

$$V_{\text{Ag}} = \frac{2065\ \text{г} - 1400\ \text{г}}{8{,}8\frac{\text{г}}{\text{см}^3}} \approx 76\ \text{см}^3,$$

а масса серебра

$$m_{\text{Ag}} = 10{,}5\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 76\ \text{см}^3 = 798\ \text{г},$$

что составляет $798\ \text{г}/1400\ \text{г} = 57\%$ от массы статуэтки.

Критерии оценивания

Указано, что отношение роста Васи к высоте статуэтки, взятое в кубе, есть отношение объёмов отличника и статуэтки .... 2 балла
Найден объём статуэтки .... 3 балла
Найден объём серебра в статуэтке .... 3 балла
Получен ответ .... 2 балла
(если ход решения правильный, но ответ получен неверный из-за ошибки в вычислениях, за каждый пункт с вычислительной ошибкой снимается 1 балл)

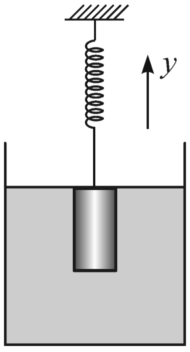
Задача 4

Автор

Паринов Д.А.

Условие

В цилиндрический сосуд с водой опущен металлический цилиндр, подвешенный на пружине жёсткостью $k = 10$ Н/м. Уровень воды в сосуде совпадает с положением верхней поверхности цилиндра (см. рисунок). После того, как точку подвеса пружины подняли вверх на $y = 5$ см, удлинение пружины увеличилось на $x = 2$ см, а верхняя поверхность цилиндра оказалась на $h = 4$ см выше уровня воды (нижняя поверхность цилиндра всё ещё в воде). Чему равна площадь поперечного сечения сосуда? Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение

Обозначим искомую площадь через S. Из-за того, что часть металлического цилиндра вытащили из воды, уровень воды в сосуде понизился. Относительно старого уровня воды цилиндр поднялся на $(y - x)$, а относительно нового на h. Значит, уровень воды в сосуде опустился на

$$h_1 = h - (y - x) = 1 \text{ см}.$$

Вес вытесняемой цилиндром жидкости уменьшился на $\rho g S_1 h$, где S_1 - площадь цилиндра. Значит, на столько же уменьшилась действующая на цилиндр сила Архимеда и на столько же увеличилась сила натяжения пружины:

$$kx = \rho g S_1 h, \quad \text{откуда} \quad S_1 = \frac{kx}{\rho g h} = 5 \text{ см}^2.$$

Теперь найдем соотношение между S и S_1. Для упрощения рассуждений можно считать, что вода в сосуде опускается как бы в два этапа. На первом этапе цилиндр поднимается на высоту $h - h_1 = 3$ см, а затем вода дополнительно опускается на высоту $h_1 = 1$ см, "затекая" в пространство под цилиндром (высота этого пространства $h - h_1$). Поскольку плотность воды не изменяется, то

$$h_1(S - S_1) = (h - h_1)S_1.$$

Отсюда $S = \frac{h}{h_1} S_1 = 4S_1 = \frac{kx}{\rho g h_1} = 20$ см^2.

Критерии оценивания

Найдено понижение уровня воды в сосуде ....3 балла

Изменение веса вытесненной цилиндром воды приравнено к изменению силы натяжения пружины ....3 балла

Найдено соотношение между площадями цилиндра и сосуда ....2 балла

Получен ответ..2 балла

Задача 5

Автор

Варламов С.Д.

Условие

Плотность воздуха при постоянном давлении обратно пропорциональна его ***абсолютной*** температуре T, и при температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ равна $1{,}3\ \text{кг}/\text{м}^3$. В Васиной комнате было очень жарко - комнатный термометр показывал $+27\ ^\circ\mathrm{C}$. Поэтому, придя домой, Вася открыл окно, чтобы проветрить помещение, и отправился гулять. Вернувшись, он увидел, что термометр показывает всего $+10\ ^\circ\mathrm{C}$. Комната имеет размеры (в длину, ширину и высоту) $3{,}5\ \text{м}\times 4\ \text{м}\times 3\ \text{м}$. Насколько увеличилась масса воздуха в комнате после такого проветривания?

Примечание: абсолютная температура T измеряется в Кельвинах (К) и рассчитывается по формуле:

$$T = t + 273\ \text{град},$$

где t — температура, выраженная в градусах Цельсия.

Решение

Переведём все встречающиеся в задаче температуры, выраженные в градусах Цельсия, в абсолютную шкалу:

$$T_0 = 0\ ^\circ\mathrm{C} + 273\ \text{град} = 273\ \text{К},$$
$$T_1 = 27\ ^\circ\mathrm{C} + 273\ \text{град} = 300\ \text{К},$$
$$T_2 = 10\ ^\circ\mathrm{C} + 273\ \text{град} = 283\ \text{К}.$$

Как сказано в условии, плотность воздуха при постоянном давлении обратно пропорциональна его абсолютной температуре:

$$\rho = \frac{A}{T}.$$

Коэффициент пропорциональности A найдём, зная плотность ρ_0 при температуре T_0

$$A = \rho_0 T_0 = 1{,}3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 273\ \text{К} \approx 355\ \frac{\text{кг}\cdot\text{К}}{\text{м}^3}.$$

Рассчитаем плотности воздуха в комнате до и после проветривания

$$\rho_1 = \frac{A}{T_1} \approx 1{,}18\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$
$$\rho_2 = \frac{A}{T_2} \approx 1{,}25\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Объём комнаты $V = 3{,}5\ \text{м}\times 4\ \text{м}\times 3\ \text{м} = 42\ \text{м}^3$,значит, масса воздуха в комнате за время проветривания увеличилась на

$$M = (\rho_2 - \rho_1)V \approx 3\ \text{кг}.$$

Критерии оценивания

Сделан перевод температур в абсолютную шкалу....................3 балла
Найден коэффициент пропорциональности A....................1 балл
Найдена плотность воздуха в комнате до проветривания....................1 балл
Найдена плотность воздуха в комнате после проветривания....................1 балл
Найден объём комнаты....................1 балл
Получен ответ....................3 балла

8 класс

Задача 1

Автор

Трушников Н.Д.

Условие

На рычажных весах уравновешены вертикально расположенный однородный цилиндр и груз массой m**.** Цилиндр подвешен к плечу весов на легкой нити и наполовину погружен в воду, а длина плеча, к концу которого подвешен цилиндр, вдвое больше длины другого плеча. Если к грузу массой m прицепить ещё один груз такой же массой m, то равновесие будет достигнуто, если 2/3 цилиндра будут находиться над водой. Найдите плотность ρ материала, из которого сделан цилиндр. Плотность воды равна $\rho_0 = 1{,}0\ ^{\text{г}}/_{\text{см}^3}$.

Решение

Обозначим массу и объем цилиндра через $M_\text{ц}$ и $V_\text{ц}$. Запишем правила моментов для первого и второго случаев:

$$mg = 2\left(M_\text{ц}g - \rho_0 g\frac{V_\text{ц}}{2}\right),$$

$$2mg = 2\left(M_\text{ц}g - \rho_0 g\frac{V_\text{ц}}{3}\right).$$

Выразим mgиз второго уравнения и подставим в первое:

$$M_\text{ц}g - \rho_0 g\frac{V_\text{ц}}{3} = 2\left(M_\text{ц}g - \rho_0 g\frac{V_\text{ц}}{2}\right).$$

Отсюда найдем $M_\text{ц}$:

$$M_\text{ц} = \frac{2}{3}\rho_0 V_\text{ц}.$$

Значит, плотность цилиндра:

$$\rho = \frac{2}{3}\rho_0 = \frac{2}{3}\cdot 1000\ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3} \approx 667\ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}.$$

Критерии оценивания

Записано правило моментов для первого случая....................2 балла
Записано правило моментов для второго случая....................3 балла
Получен ответ....................5 баллов

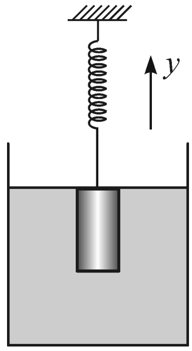
Задача 2

Автор

Паринов Д.А.

Условие

В цилиндрический сосуд с водой опущен металлический цилиндр, подвешенный на пружине жёсткостью $k = 10$ Н/м. Уровень воды в сосуде совпадает с положением верхней поверхности цилиндра (см. рисунок). После того, как точку подвеса пружины подняли вверх на $y = 5$ см, удлинение пружины увеличилось на $x = 2$ см, а верхняя поверхность цилиндра оказалась на $h = 4$ см выше уровня воды (нижняя поверхность цилиндра всё ещё в воде). Чему равна площадь поперечного сечения сосуда? Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение

Обозначим искомую площадь через S. Из-за того, что часть металлического цилиндра вытащили из воды, уровень воды в сосуде понизился. Относительно старого уровня цилиндр поднялся на $(y-x)$,а относительно нового на h. Значит, уровень воды в сосуде опустился на

$$h_1 = h-(y-x) = 1\ \text{см}.$$

Вес вытесняемой цилиндром жидкости уменьшился на $\rho g S_1 h$, где S_1 - площадь цилиндра. Значит, на столько же уменьшилась действующая на цилиндр сила Архимеда и на столько же увеличилась сила натяжения пружины:

$$kx = \rho g S_1 h, \quad \text{откуда} \quad S_1 = \frac{kx}{\rho g h} = 5\ \text{см}^2.$$

Теперь найдем соотношение между S и S_1. Для упрощения рассуждений можно считать, что вода в сосуде опускается как бы в два этапа. На первом этапе цилиндр поднимается на высоту $h-h_1 = 3$ см, а затем вода дополнительно опускается на высоту $h_1 = 1$ см, "затекая" в пространство под цилиндром (высота этого пространства $h-h_1$). Поскольку плотность воды не изменяется, то

$$h_1(S-S_1) = (h-h_1)S_1.$$

Отсюда $S = \frac{h}{h_1}S_1 = 4S_1 = \frac{kx}{\rho g h_1} = 20\ \text{см}^2$.

Критерии оценивания

Найдено понижение уровня воды в сосуде ....3 балла

Изменение веса вытесненной цилиндром воды приравнено к изменению силы натяжения пружины ....3 балла

Найдено соотношение между площадями цилиндра и сосуда ....2 балла

Получен ответ....................2 балла

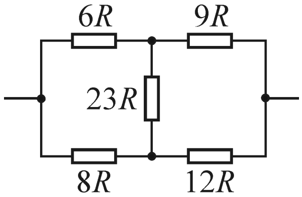
Задача 3

Автор

Крайнев В.Д.

Условие

Найдите сопротивление участка цепи, схема которого показана на рисунке, если $R = 7$ Ом.



Решение

Пусть рассматриваемый участок цепи находится под некоторым напряжением U и через него течет ток силой I. Введем обозначения токов, текущих через резисторы, так, как показано на рисунке, и запишем закон Ома для участков цепиABD и ACD:

$$\begin{cases} 6RI_{00} + 9RI_{01} = U, \\ 8RI_{10} + 12RI_{11} = U. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 4, а второе на 3, и сложим их. Получим

$$24R(I_{00} + I_{10}) + 36R(I_{01} + I_{11}) = 7U.$$

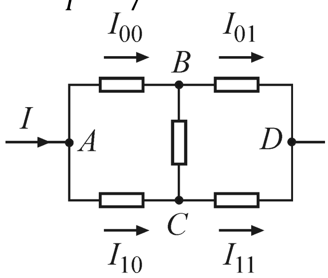
Заметим, что $I_{00} + I_{10} = I_{01} + I_{11} = I$. Значит,

$$24RI + 36RI = 7U,$$

$$\frac{60}{7}R = \frac{U}{I}.$$

Поэтому сопротивление участка цепи равно

$$R_{\text{ц}} = \frac{U}{I} = \frac{60}{7}R = 60\ \text{Ом}.$$



Критерии оценивания

Записан закон Ома для участка ABD ....1 балл
Записан закон Ома для участка ACD..1 балл
Получено уравнение, в которое I_{00}, I_{10} и I_{01}, I_{11} входят с одинаковыми коэффициентами ....2 балла
Записана связь между силами токов ....2 балла
Получен ответ..4 балла

При решении этой задачи часть школьников может воспользоваться тем фактом, что в сбалансированной мостовой схеме ток через центральный резистор не течет. Такие решения оцениваются по следующей схеме:

Обоснование того, что через резистор с сопротивлением 23R ток не течёт ($\varphi_B = \varphi_C$) ....5 баллов
Получен ответ..5 баллов

Задача 4

Автор

Варламов С.Д.

Условие

Литр воды имеет комнатную температуру 20 °C и находится в открытом сверху тонкостенном сосуде. В воду быстро (за время меньше чем 1 с) опустили разогретую до 800 °C тонкую медную плоскую пластину массой 0,64 кг, удерживая её клещами. Пластина лежит в вертикальной плоскости. Верхний край пластины оказался вровень с уровнем воды в сосуде. Движениями пластины воду перемешали, и сразу же опустили в воду термометр. Что он показал?

Удельная теплоёмкость меди 0,38 кДж/(кг · °C), воды — 4,2 кДж/(кг · °C), удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

Решение

Поскольку пластина нагрета до температуры, намного большей температуры парообразования воды (100 °C), при контакте с пластиной часть воды быстро нагреется до температуры кипения, быстро испарится, покинет сосуд и не будет участвовать в дальнейшем теплообмене. Процесс испарения прекратится, когда пластина остынет до $100\ ^\circ\mathrm{C}$. Оценим массу испарившейся воды:

$$m_{\text{исп}} = \frac{0{,}38\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 0{,}64\ \text{кг}\cdot(800\ ^\circ\text{C} - 100\ ^\circ\text{C})}{2{,}3\,\frac{\text{МДж}}{\text{кг}} + 4{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 80\ ^\circ\text{C}} \approx 65\ \text{г}.$$

Масса оставшейся в сосуде воды

$$m_{\text{ост}} = 1000\ \text{г} - 65\ \text{г} = 935\ \text{г}.$$

Искомую температуру t найдём из уравнения теплового баланса:

$$4{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 935\ \text{г}\cdot(t - 20\ ^\circ\text{C}) = 0{,}38\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 640\ \text{г}\cdot(100\ ^\circ\text{C} - t),$$

$$t \approx 24{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

Критерии оценивания

Указано, что вода сразу после погружения пластины будет испаряться ....1 балл
Указано, что вода перестанет испаряться, когда пластина остынет до $100\ ^\circ\mathrm{C}$..........................2 балла
Найдена масса оставшейся после испарения воды..2 балла
Записано уравнение теплового баланса для теплообмена воды и пластины...........................2 балла
Получен ответ...3 балла
Решение без учёта испарения воды оценивается из 3 баллов.

Задача 5

Автор

Бычков А.И.

Условие

При нагревании или охлаждении твердые тела, как известно, изменяют свой объем. Коэффициентом объемного расширения β называется коэффициент пропорциональности между относительным изменением объема $\frac{\Delta V}{\mathrm{V}}$ тела и изменением температуры этого тела Δt, то есть $\frac{\Delta V}{V} = \beta\Delta t$.

Стеклянный шарик с коэффициентом объёмного расширения β_1 полностью погружают в жидкость сначала при температуре t_1, а затем - при температуре t_2. Модули сил Архимеда, действующих на шарик в этих случаях, равны, соответственно F_1 и F_2. Определите коэффициент объёмного расширения жидкости β_2.

Решение

Обозначим объёмы шарика в первом и во втором случае через V_1 и V_2. Эти объёмы связаны соотношением:

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \beta_1(t_2 - t_1) = 1 + \beta_1\Delta t.$$

Обозначим плотности жидкости в первом и во втором случае через ρ_1 и ρ_2. Поскольку плотность обратно пропорциональна объёму, то

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 + \beta_2(t_2 - t_1) = 1 + \beta_2\Delta t.$$

Отношение модулей сил Архимеда в первом и во втором случае равно

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\rho_2 g V_2}{\rho_1 g V_1} = \frac{1 + \beta_1\Delta t}{1 + \beta_2\Delta t}, \quad \text{откуда} \quad \beta_2 = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{F_1}{F_2} - 1\right) + \frac{F_1}{F_2}\beta_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}\left(\frac{F_1}{FP_2} - 1\right) + \frac{F_1}{F_2}\beta_1.$$

Критерии оценивания

Получено выражение для отношения V_2/V_1 ....2 балла
Получено выражение для отношения ρ_2/ρ_1 ....2 балла
Записаны выражения для P_1 и P_2 в виде $P = \rho g V$, либо отношение P_2/P_1...............................2 балла
Получен ответ...4 балла

9 класс

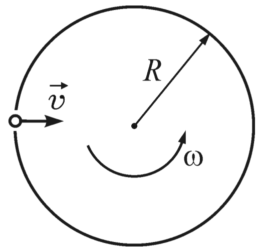
Задача 1

Автор

Трушников Н.Д.

Условие

Маленький шарик влетает со скоростью v в малое отверстие в стенке полого цилиндра, вращающегося вокруг своей оси (см. рис.). Радиус R цилиндра много больше толщины его стенок. Скорость шарика перпендикулярна оси цилиндра. Какой должна быть угловая скорость вращения цилиндра ω для того, чтобы шарик вылетел наружу, не испытав соударений? Силу тяжести не учитывать.



Решение

Если шарик не испытывает соударений со стенками за время пролёта сквозь цилиндр и вылетает через то же отверстие, через которое влетел, значит:

$$t_{\text{пролета}} = {}^{2R}/_{v} = {}^{\varphi}/_{\omega},$$

где φ—угол поворота отверстия за время $t_{\text{пролета}}$. Этот угол выражается формулой:

$$\varphi = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1),$$

где n — любое целое число. Таким образом, искомая угловая скорость:

$$\omega = \frac{\pi(2n+1)v}{2R}.$$

Критерии оценивания

Найдено время пролёта шарика через цилиндр ....2 балла
Записана связь между углом поворота цилиндра, угловой скоростью и временем пролёта ..2 балла
Правильно выбраны возможные углы поворота цилиндра и получен ответ..........................6 баллов
(если указано только одно возможное значение угла φ, то последний пункт оценивается из 1 балла, если несколько, но не все возможные, то из 3 баллов)

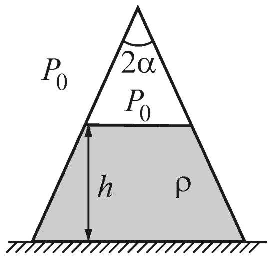
Задача 2

Автор

Черников Ю.А.

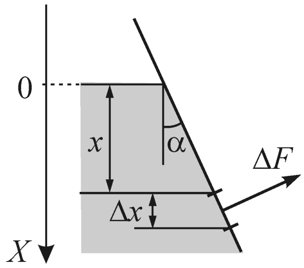
Условие

Полая прямая призма, сделанная из тонкого прочного листового материала, имеет высоту L, а ее основания представляют собой равнобедренные треугольники с углом 2α между боковыми сторонами. У призмы аккуратно удалили боковую грань, лежащую напротив угла 2α, и поставили призму на гладкий стол так, что упомянутый угол оказался сверху (основание призмы лежит в плоскости рисунка, ее высота перпендикулярна плоскости рисунка). Вблизи оказавшегося сверху угла проделали маленькое отверстие, и начали медленно заливать через него внутрь призмы воду плотностью ρ. В момент, когда уровень воды в призме достиг высоты h, вода начала вытекать из-под призмы. Найдите массу m призмы с удаленной гранью, считая, что давление P_0 воздуха над водой в призме и снаружи одинаково и равно атмосферному.



Решение

Силу тяжести, действующую на сосуд, должна уравновешивать сила давления на стенки сосуда со стороны воды. Найдём модуль силы давления ΔF, действующей на часть одной из стенок сосуда малой высотой Δx, находящуюся на глубине x (см. рис.):



$$\Delta F = \frac{\rho g x L \Delta x}{\cos\alpha}.$$

Проекция этой силы на вертикальную ось X равна

$$\Delta F_x = -\rho g x L \Delta x \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Чтобы найти проекцию F_x полной силы, действующей на стенку, нужно просуммировать проекции сил, действующих на все участки, лежащие на глубинах от 0 до h. Это всё равно, что найти площадь под графиком зависимости $\Delta F_x/\Delta x$ от x. Поскольку этот график линейный с угловым коэффициентом $\rho g L \operatorname{tg}\alpha$, то

$$F_x = -\rho g L \operatorname{tg}\alpha \frac{h^2}{2}.$$

Осталось учесть, что у сосуда есть две стенки, и приравнять нулю сумму силы тяжести $m_{\min} g$ и проекции силы давления F_x:

$$m_{\min} g + 2F_x = 0, \quad \text{откуда} \quad m_{\min} = \rho L h^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Критерии оценивания

Найдена сила давления, действующая на малый участок стенки ....3 балла
Найдена полная сила давления..3 балла
Получен ответ...4 балла

Задача 3

Автор

Варламов С.Д.

Условие

Литр воды имеет комнатную температуру 20 °C и находится в открытом сверху тонкостенном сосуде. В воду быстро (за время меньше чем 1 с) опустили разогретую до 800 °C тонкую медную плоскую пластину массой 0,64 кг, удерживая её клещами. Пластина лежит в вертикальной плоскости. Верхний край пластины оказался вровень с уровнем воды в сосуде. Движениями пластины воду перемешали, и сразу же опустили в воду термометр. Что он показал?

Удельная теплоёмкость меди 0,38 кДж/(кг · °C), воды — 4,2 кДж/(кг · °C), удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

Решение

Поскольку пластина нагрета до температуры, намного большей температуры парообразования воды (100 °C), при контакте с пластиной часть воды быстро нагреется до температуры кипения, быстро испарится, покинет сосуд и не будет участвовать в дальнейшем теплообмене. Процесс испарения прекратится, когда пластина остынет до $100\ ^\circ\mathrm{C}$. Оценим массу испарившейся воды:

$$m_{\text{исп}} = \frac{0{,}38\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 0{,}64\ \text{кг}\cdot(800\ ^\circ\text{C} - 100\ ^\circ\text{C})}{2{,}3\,\frac{\text{МДж}}{\text{кг}} + 4{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 80\ ^\circ\text{C}} \approx 65\ \text{г}.$$

Масса оставшейся в сосуде воды

$$m_{\text{ост}} = 1000\ \text{г} - 65\ \text{г} = 935\ \text{г}.$$

Искомую температуру t найдём из уравнения теплового баланса:

$$4{,}2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 935\ \text{г}\cdot(t - 20\ ^\circ\text{C}) = 0{,}38\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 640\ \text{г}\cdot(100\ ^\circ\text{C} - t),$$

$$t \approx 24{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

Критерии оценивания

Указано, что вода сразу после погружения пластины будет испаряться ....1 балл
Указано, что вода перестанет испаряться, когда пластина остынет до $100\ ^\circ\mathrm{C}$..........................2 балла
Найдена масса оставшейся после испарения воды...2 балла
Записано уравнение теплового баланса для теплообмена воды и пластины...........................2 балла
Получен ответ..3 балла
Решение без учёта испарения воды оценивается из 3 баллов.

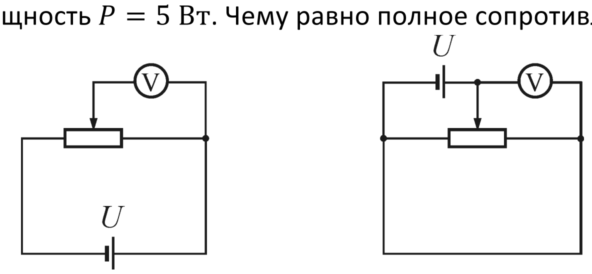
Задача 4

Автор

Паринов Д.А.

Условие

Из источника пост оянного напряжения, реостата и вольтметра (все приборы идеальные) собрана цепь, схема которой изображена на рисунке слева. Вольтметр показывает напряжение $V_1 = 3$ В. Затем, не меняя положения движка реостата, источник подключают по-другому (рис. справа). При этом вольтметр показывает напряжение $V_2 = 15$ В, и на реостате выделяется мощность $P = 5$ Вт. Чему равно полное сопротивление реостата?



Решение

Обозначим полное сопротивление реостата через R, а сопротивление участка реостата, к которому в первом случае подключен вольтметр, обозначим kR. Тогда сопротивление другого участка реостата равно $(1-k)R$.

В первом случае показания вольтметра равны

$$V_1 = kU,$$

где U — напряжение источника, значит, $k = V_1/U$.

Во втором случае оба участка реостата соединены параллельно и подключены к источнику. Поэтому вольтметр показывает напряжение источника $U = V_2$, а выделяющаяся на реостате мощность равна

$$P = \frac{U^2}{kR} + \frac{U^2}{(1-k)R} = \frac{U^2}{R}\frac{1}{k(1-k)}, \quad \text{откуда} \quad R = \frac{U^2}{P}\frac{1}{k(1-k)}.$$

Как было показано ранее, $U = V_2$, а $k = V_1/U = V_1/V_2 = 0{,}2$, значит,

$$R = \frac{1}{0{,}16}\frac{V_2^2}{P} \approx 281 \text{ Ом}.$$

Критерии оценивания

Замечено, что $U = V_2$ ....2 балла
Найден коэффициент k ....2 балла
Записано выражение для мощности P ....3 балла
Получен ответ..3 балла

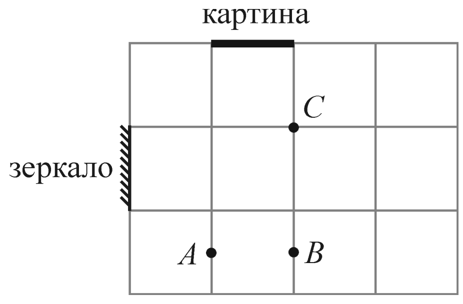
Задача 5

Автор

Паринов Д.А.

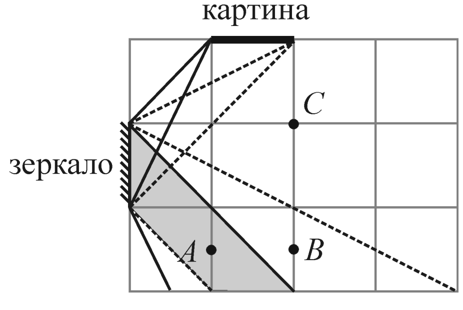
Условие

В прямоугольной комнате на одной из стен висит картина, а на другой — плоское зеркало (см. рис.). Из какой точки комнаты (A, B или C) можно полностью увидеть отражение картины в зеркале?



Решение

Чтобы полностью увидеть отражение картины, необходимо и достаточно видеть отражение каждого из краёв картины. Поэтому из каждого края картины проведём луч в каждый край зеркала, и для каждого падающего луча построим отражённый (см. рис.). Пересечение областей, из которых видно края картины, на рисунке закрашено. Из рисунка ясно, что полностью отражение картины можно увидеть только из точки A. Из точки B отражение видно частично, из точки C не видно совсем.



Критерии оценивания

Проведено построение лучей из краёв картины к краям зеркала и отражённых от него ....4 балла
Указана область, из которой полностью видно отражение картины ....2 балла
Дан ответ ....4 балла

10 класс

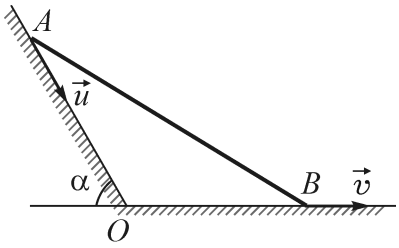
Задача 1

Автор

Трушников Н.Д.

Условие

На двугранном угле находится тонкий стержень, нижний конец которого перемещают со скоростью v вдоль горизонтали (см. рисунок). Найдите скорость u верхнего конца стержня в момент, когда OA: $OB = 2$: 1. Угол $\alpha = 60°$. Концы стержня не отрываются от поверхностей двугранного угла.



Решение

За малое время Δt нижний конец стержня переместится на расстояние $v\Delta t$, и расстояние от вершины угла до этого конца станет равно $OB' = OB + v\Delta t$. За то же время верхний конец стержня переместится на расстояние $u\Delta t$, и расстояние от него до вершины угла станет равно $OA' = OA - u\Delta t$. Длина стержня постоянна:

$$OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha = OA'^2 + OB'^2 + 2 \cdot OA' \cdot OB' \cdot \cos\alpha\,.$$

Поскольку время Δt мало, то:

$$OA'^2 \approx OA^2 - 2 \cdot OA \cdot u\Delta t,$$
$$OB'^2 \approx OB^2 + 2 \cdot OB \cdot v\Delta t,$$
$$OA' \cdot OB' \approx OA \cdot OB + OA \cdot v\Delta t - OB \cdot u\Delta t.$$

Подставляя полученные соотношения в исходную формулу и приводя подобные слагаемые, получим

$$2 \cdot OB \cdot v\Delta t - 2 \cdot OA \cdot u\Delta t + 2(OA \cdot v\Delta t - OB \cdot u\Delta t)\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$u = \frac{OB + OA\cos\alpha}{OA + OB\cos\alpha}v = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2 + \cos\alpha}v = \frac{4}{5}v.$$

Критерии оценивания

Отмечено, что длина стержня постоянна ....1 балл
Длина стержня выражена через AO и OB ....2 балла
Получено выражение для длины стержня через малое время, сделаны необходимые приближения..4 балла
Получен ответ..3 балла

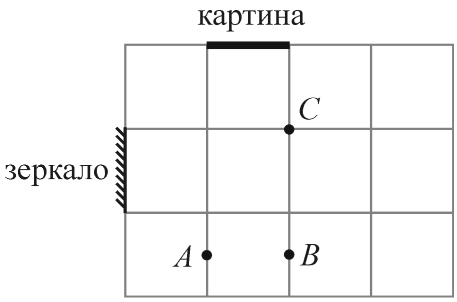
Задача 2

Автор

Паринов Д.А.

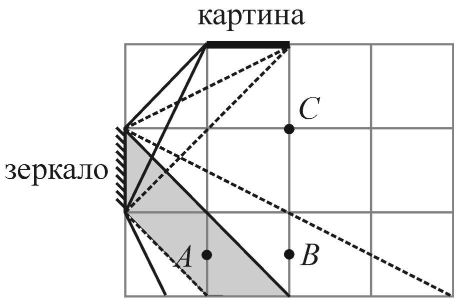
Условие

В прямоугольной комнате на одной из стен висит картина, а на другой — плоское зеркало (см. рис.). Из какой точки комнаты (A, B или C) можно полностью увидеть отражение картины в зеркале?



Решение

Чтобы полностью увидеть отражение картины, необходимо и достаточно видеть отражение каждого из краёв картины. Поэтому из каждого края картины проведём луч в каждый край зеркала, и для каждого падающего луча построим отражённый (см. рис.). Пересечение областей, из которых видно края картины, на рисунке закрашено. Из рисунка ясно, что полностью отражение картины можно увидеть только из точки A. Из точки B отражение видно частично, из точки C не видно совсем.



Критерии оценивания

Проведено построение лучей из краёв картины к краям зеркала и отражённых от него ....4 балла
Указана область, из которой полностью видно отражение картины ....2 балла
Дан ответ ....4 балла

Задача 3

Автор

Варламов С.Д.

Условие

Аккумулятор массой 5 кг, имеющий ЭДС 5 В, опустили полностью в дистиллированную воду на прочной нити, которая оказалась натянутой с силой 5 Н. Если этому аккумулятору (без воды) сообщить количество теплоты 5 кДж, то он нагреется на 5 градусов. Когда же к этому аккумулятору подключили резистор, через него потек ток силой 5 А, напряжение на выводах аккумулятора уменьшилось на 5%, и через 5 минут аккумулятор немного нагрелся. Найдите:

- среднюю плотность ρ аккумулятора;
- среднюю удельную теплоёмкость c аккумулятора,
- сопротивление R резистора,
- изменение температуры Δt аккумулятора после 5 минут работы с нагрузкой, если потерями теплоты можно пренебречь.

Плотность воды $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение

Сила натяжения нити равна разности действующих на аккумулятор силы тяжести и силы Архимеда $T = mg - \rho_0 gV = (\rho - \rho_0)gV = 5$ Н, где V — объём аккумулятора, m — его масса. Преобразуем это выражение

$$T = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\rho V g = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) m g, \quad \text{откуда} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{T}{mg} = 0{,}9.$$

Поэтому средняя плотность аккумулятора $\rho = \rho_0/0{,}9 \approx 1{,}1\ \text{г/см}^3$.

Средняя удельная теплоёмкость аккумулятора равна отношению подведённого к нему количества теплоты к изменению его температуры и к массе $m = 5$ кг:

$$c = \frac{5\ \text{кДж}}{5\ \text{кг} \cdot 5\ \text{град}} = 200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

При подключении резистора к аккумулятору напряжение на его выводах уменьшилось на 5% и стало равным 4,75 В. Сопротивление резистора найдём как отношение напряжения на выводах аккумулятора к силе текущего через резистор тока:

$$R = \frac{4{,}75\ \text{В}}{5\ \text{А}} = 0{,}95\ \text{Ом}.$$

При работе с нагрузкой на внутреннем сопротивлении аккумулятора выделяется мощность $(5\ \text{В} - 4{,}75\ \text{В}) \cdot 5\ \text{А} = 1{,}25\ \text{Вт}$, которая идёт на нагревание аккумулятора. За 5 минут в аккумуляторе выделится количество теплоты $Q = 1{,}25\ \text{Вт} \cdot 300\ \text{с} = 375\ \text{Дж}$, за счёт которого он нагреется на

$$\Delta t = \frac{Q}{Cm} = \frac{375\ \text{Дж}}{200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}} \cdot 5\ \text{кг}} = 0{,}375\ \text{градуса}.$$

Критерии оценивания

Найдена средняя плотность батарейки ....3 балла
Найдена средняя удельная теплоёмкость батарейки ....2 балла
Найдено сопротивление резистора ....2 балла
Найдено изменение температуры батарейки..3 балла

Задача 4

Автор

Трушников Н.Д.

Условие

Герметичный теплонепроницаемый вертикальный цилиндрический сосуд разделён массивным теплонепроницаемым горизонтальным тонким поршнем, скользящим вдоль стенок без трения. В обеих частях сосуда находится один и тот же идеальный газ. Известно, что при температуре T в обеих частях сосуда поршень делит сосуд в отношении 2:1, считая от его верхнего торца. Если перевернуть сосуд и нагреть оказавшийся под поршнем газ до температуры $4T$, а температуру второй части оставить неизменной, то поршень вновь разделит сосуд в отношении 2:1, считая от верхнего торца. Чему равно отношение масс газов, разделённых поршнем?

Решение

Пусть в первом положении сверху находится газ массой m_1, а снизу газ массой m_2. Пусть начальные давления в частях сосуда и их объёмы равны соответственно P_1, P_2, V_1, V_2, а конечные P_1', P_2', V_1', V_2'. Также заметим, что разность давлений снизу и сверху постоянна и равна $\frac{mg}{S}$, то есть давлению, создаваемому поршнем площадью S. Запишем отношение масс газов в первом и втором случаях, следующее из уравнений Клайперона-Менделеева:

$$\frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

$$\frac{P_1' V_1'}{P_2' V_2'} = \frac{4m_1}{m_2}.$$

Подставив в записанные выше уравнения данные в условии отношения объёмов

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_1{}'}{V_2{}'} = \frac{1}{2},$$

получим:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2},$$

$$\frac{P_1{}'}{P_2{}'} = \frac{8m_1}{m_2}.$$

Используя постоянство разности давлений, находим:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}\right)P_2 = \left(8\frac{m_1}{m_2} - 1\right)P_2{}'.$$

Отношение P_2/P_2' найдём из закона Бойля-Мариотта для газа в той части сосуда, в которой температура постоянна:

$$\frac{P_2}{P_2'} = \frac{V_2'}{V_2} = 2.$$

В итоге:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

Критерии оценивания

Найдена связь отношения давлений с отношением масс для первого случая ....2 балла
Найдена связь отношения давлений с отношением масс для второго случая ....2 балла
Записано условие, следующее из постоянства разности давлений снизу и сверху..................2 балла
Найдено отношение P_2/P_2'..2 балла
Получен ответ...2 балла

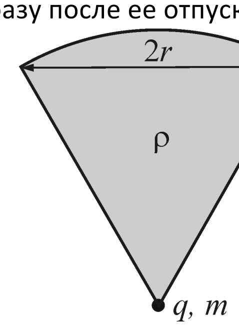
Задача 5

Автор

Бычков А.И.

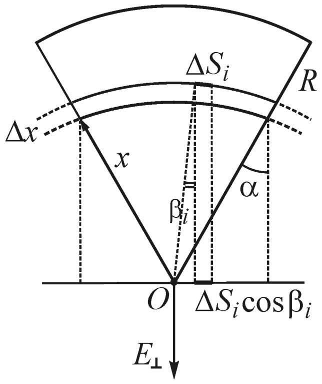
Условие

Жители далекой планеты τ-Кита используют в качестве пушки устройство, которое работает на основе явления взаимодействия заряженных тел. Они вырезают из равномерно заряженного по объему шара радиусом R сектор, ограниченный конусом с радиусом r при его основании. Объёмная плотность заряда «пушки» равна $\rho > 0$. К закрепленному орудию подносится маленькая дробинка массой m с зарядом $q > 0$, как показано на рисунке. Потом дробинку отпускают. Определите ускорение дробинки a_0 в момент сразу после ее отпускания.



Решение

Найдем напряжённость электрического поля в точке O, которое создает равномерно заряженный по объёму сектор шара. Из симметрии по отношению к повороту следует, что вектор напряжённости электрического поля в точке O направлен вдоль оси симметрии сектора, как показано на рисунке. Найдём вклад в это поле от сферического слоя радиусом x и малой толщиной Δx. Для этого выделим на поверхности этого слоя маленький элемент площадью ΔS_i и вычислим напряженность $E'_\perp$, которую он создает в точке O.



Из закона Кулона и принципа суперпозиции для напряженности электрических полей следует (см. рисунок):

$$E'_\perp = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\Delta x\Delta S_i}{x^2}\cos\beta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\Delta x}{x^2}\sum_i \Delta S_i\cos\beta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\Delta x}{x^2}\pi(x\sin\alpha)^2 = \frac{\rho\Delta x}{4\varepsilon_0}\sin^2\alpha\,.$$

Искомая напряженность поля получается путем дальнейшего суммирования по всем слоям. Она равна

$$E_\perp = \sum E'_\perp = \sum \frac{\rho\Delta x}{4\varepsilon_0}\sin^2\alpha = \frac{\rho\sin^2\alpha}{4\varepsilon_0}\sum\Delta x = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot R = \frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0 R}.$$

Отсюда находим начальное ускорение дробинки:

$$a_0 = \frac{E_\perp q}{m} = \frac{\rho q r^2}{4\varepsilon_0 m R}.$$

Критерии оценивания

Из соображений симметрии указано направление вектора напряженности поля ....2 балла
Найдено поле тонкого сферического слоя ....4 балла
Найдено полное поле..2 балла
Получен ответ...2 балла

11 класс

Задача 1

Автор

Крайнев В.Д.

Условие

Волейболист Вася хочет кинуть мяч в вертикальную стену с таким расчётом, чтобы мяч вернулся к нему в руки. Вася знает, что при ударе мяч отражается от стены «зеркально» (угол падения равен углу отражения), но при этом мяч теряет половину величины своей скорости. Василий умеет запускать мяч в любом направлении со скоростью не большей, чем u_0. Найдите максимальное расстояние от места бросания до стены, при котором он сможет осуществить задуманное. Ускорение свободного падения g. Вася не движется по спортзалу, место бросания мяча совпадает с местом, в котором Вася его ловит.

Решение

Пусть L— расстояние от Васи до стены. Направим ось Ox по горизонтали от волейболиста к стене, а ось Oy вертикально вверх (начало координат совместим с точкой бросания мяча). Пусть Вася бросает мяч с некоторой скоростью u под углом α к горизонту. Проекция скорости мяча на горизонтальную ось до удара равна $u\cos\alpha$, после удара — $\frac{-u\cos\alpha}{2}$. Время полёта мяча до удара о стену равно

$$t_1 = \frac{L}{u\cos\alpha} = t,$$

после удара

$$t_2 = \frac{L}{\left(\frac{u\cos\alpha}{2}\right)} = 2t.$$

В момент броска координата мяча $y(0) = 0$, тогда в момент удара

$$y(t_1) = u\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Вертикальная проекция скорости мяча перед ударом:

$$u_y = u\sin\alpha - gt,$$

сразу после удара:

$$u_y' = \frac{1}{2}u_y = \frac{1}{2}(u\sin\alpha - gt).$$

После удара мяч должен вернуться в ту же точку. Поэтому

$$u\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2} + \frac{1}{2}(u\sin\alpha - gt)(2t) - \frac{g(2t)^2}{2} = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$u = \frac{7}{4}\frac{gt}{\sin\alpha} = \frac{7}{4}\frac{gL}{u\sin\alpha\cos\alpha},$$

откуда

$$L = \frac{2u^2\sin 2\alpha}{7g}.$$

Максимально возможное значение $\sin 2\alpha$ равно 1 и достигается при $\alpha = \pi/4$. Поэтому максимальное расстояние от волейболиста до стены, при котором он сможет осуществить задуманный бросок, равно

$$L_{\max} = \frac{2u_0^2}{7g}.$$

Критерии оценивания

Найдено время движения мяча до удара.. 1 балл
Найдено время движения мяча после удара ....2 балла
Записан закон движения мяча после удара в проекции на вертикальную ось............2 балла
Из условия возврата в начальную точку расстояние Lвыражено через uи α..............2 балла
Получен ответ...3 балла

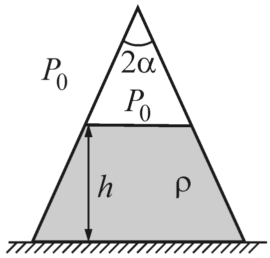
Задача 2

Автор

Черников Ю.А.

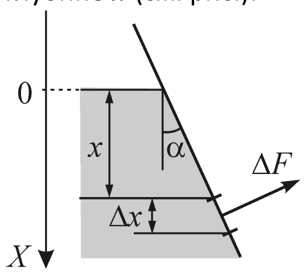
Условие

Полая прямая призма, сделанная из тонкого прочного листового материала, имеет высоту L, а ее основания представляют собой равнобедренные треугольники с углом 2α между боковыми сторонами. У призмы аккуратно удалили боковую грань, лежащую напротив угла 2α, и поставили призму на гладкий стол так, что упомянутый угол оказался сверху (основание призмы лежит в плоскости рисунка, ее высота перпендикулярна плоскости рисунка). Вблизи оказавшегося сверху угла проделали маленькое отверстие, и начали медленно заливать через него внутрь призмы воду плотностью ρ. В момент, когда уровень воды в призме достиг высоты h, вода начала вытекать из-под призмы. Найдите массу m призмы с удаленной гранью, считая, что давление P_0 воздуха над водой в призме и снаружи одинаково и равно атмосферному.



Решение

Силу тяжести, действующую на сосуд, должна уравновешивать сила давления на стенки сосуда со стороны воды. Найдём модуль силы давления ΔF, действующей на часть одной из стенок сосуда малой высотой Δx, находящуюся на глубине x (см. рис.):



$$\Delta F = \frac{\rho g x L \Delta x}{\cos\alpha}.$$

Проекция этой силы на вертикальную ось X равна

$$\Delta F_x = -\rho g x L \Delta x \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Чтобы найти проекцию F_x полной силы, действующей на стенку, нужно просуммировать проекции сил, действующих на все участки, лежащие на глубинах от 0 до h. Это всё равно, что найти площадь под графиком зависимости $\Delta F_x/\Delta x$ от x. Поскольку этот график линейный с угловым коэффициентом $\rho g L \operatorname{tg}\alpha$, то

$$F_x = -\rho g L \operatorname{tg}\alpha \frac{h^2}{2}.$$

Осталось учесть, что у сосуда есть две стенки, и приравнять нулю сумму силы тяжести $m_{\min} g$ и проекции силы давления F_x:

$$m_{\min}g + 2F_x = 0, \quad \text{откуда} \quad m_{\min} = \rho L h^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Критерии оценивания

Найдена сила давления, действующая на малый участок стенки ....3 балла

Найдена полная сила давления..3 балла

Получен ответ..4 балла

Задача 3

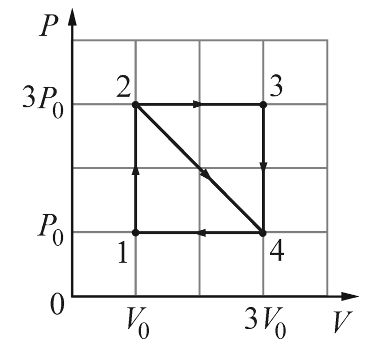
Автор

Трушников Н.Д.

Условие

С одноатомным идеальным газом проводят циклы 1-2-3-4-1 и 1-2-4-1 , показанные на рисунке. Найдите КПД обоих циклов. КПД какого из циклов больше и на сколько?

Молярная теплоёмкость одноатомного идеального газа при постоянном объёме $C_V = \frac{3}{2}R$.



Решение

Пусть ν — количество газа, участвующего в циклах, $P_0V_0 = \nu RT_0$. Рассмотрим цикл 1-2-3-4-1. Работа, совершаемая газом за цикл, равна площади, ограниченной графиком цикла:

$$A_1 = 2P_0 \cdot 2V_0 = 4P_0V_0.$$

Теплота подводится к газу на участках 1-2 и 2-3. На участке 1-2 к газу подводится количество теплоты

$$Q_{12} = C_V\nu(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 3P_0V_0,$$

а на участке 2-3

$$Q_{23} = C_P\nu(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}(9P_0V_0 - 3P_0V_0) = 15P_0V_0.$$

КПД рассматриваемого цикла:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{2}{9}.$$

Теперь рассмотрим цикл 1-2-4-1. Работа, совершаемая газом за этот цикл, равна

$$A_2 = \frac{1}{2}2P_0 \cdot 2V_0 = 2P_0V_0.$$

Теплота к газу подводится на участке 1-2 ($Q_{12} = 3P_0V_0$)и, возможно, на участке 2-4. Запишем уравнение участка 2-4:

$$\frac{P}{P_0} = 4 - \frac{V}{V_0}.$$

Запишем первое начало термодинамики для малого участка процесса 2-4:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = C_V \nu \Delta T + P\Delta V = \frac{3}{2}\nu R \Delta T + P\Delta V = \frac{3}{2}\Delta(PV) + P\Delta V.$$

Считая, что ΔPи ΔVмалы, получим, $\Delta(PV) = P\Delta V + V\Delta P$и

$$\Delta Q = \frac{5}{2}P\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta P.$$

Для процесса 2-4, где $P = P_0\left(4 - \frac{V}{V_0}\right)$, получаем $\Delta P = -\frac{P_0}{V_0}\Delta V$, и

$$\Delta Q = P_0\left(\frac{5}{2}\left(4 - \frac{V}{V_0}\right) - \frac{3}{2}\frac{V}{V_0}\right)\Delta V = 2\left(5 - \frac{2V}{V_0}\right)P_0\Delta V.$$

Видно, что при $V = \frac{5}{2}V_0$ (обозначим это состояние цифрой 5), теплота перестает подводиться к газу. В состоянии 5 давление равно $P = \frac{3}{2}P_0$. Поэтому на участке 2-4 к газу подводится теплота на участке 2-5, а на участке 5-4 теплота от газа отводится. Количество теплоты, подводимое на участке 2-5, равно:

$$Q_{24} = \frac{3}{2}(1{,}5P_0 \cdot 2{,}5V_0 - 3P_0V_0) + \frac{1}{2}(3P_0 + 1{,}5P_0)(2{,}5V_0 - V_0) = 4{,}5P_0V_0.$$

КПД цикла 1-2-4-1

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_{12} + Q_{24}} = \frac{4}{15}.$$

Как видно, КПД цикла 1-2-4-1 больше, чем КПД цикла 1-2-3-4-1 на $\frac{2}{45}$.

Критерии оценивания

Найдена работа газа в первом цикле.. 1 балл
Найдена теплота, подведённая к газу в первом цикле .... 1 балл
Найден КПД первого цикла... 1 балл
Найдена работа газа во втором цикле .... 1 балл
Найдена точка участка 2-4, в которой подводимая теплота меняет знак....................3 балла
Найдена теплота, подведённая к газу во втором цикле... 1 балл
Найден КПД второго цикла .... 1 балл
Указано, что КПД второго цикла больше, и определено, на сколько .... 1 балл

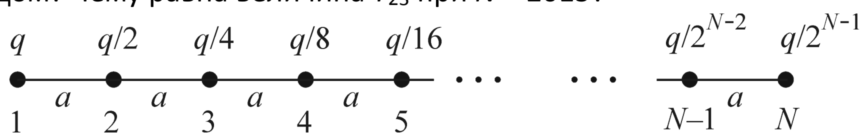
Задача 4

Автор

Якута А.А.

Условие

На нерастяжимой диэлектрической нити, расположенной в вакууме, закреплены на одинаковых расстояниях a друг от друга N точечных положительных зарядов. Величины зарядов указаны на рисунке. Модуль силы натяжения участка нити между первым и вторым зарядом равен T. Чему равен модуль силы натяжения T_{23} участка нити между вторым и третьим зарядом? Чему равна величина T_{23} при $N = 2015$?



Решение

Модуль T силы натяжения участка нити между первым и вторым зарядом равен модулю F силы электростатического взаимодействия первого заряда q со всеми остальными зарядами, закрепленными на нити. В соответствии с законом Кулона, на заряд q действует сила

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q \cdot q/2}{a^2} + \frac{q \cdot q/4}{(2a)^2} + \frac{q \cdot q/8}{(3a)^2} + \ldots + \frac{q \cdot q/2^{N-1}}{((N-1)a)^2}\right).$$

Заметим, что, поскольку каждое слагаемое этой конечной суммы пропорционально q^2, то и $F \sim q^2$.

Мысленно удалим из цепочки первый заряд q, а с противоположного конца цепочки мысленно добавим новый заряд $q/2^N$, поместив его на расстоянии a от заряда $q/2^{N-1}$. В результате получим новую цепочку из N зарядов, полностью подобную исходной цепочке, но в которой все заряды в 2 раза меньше, чем в исходной. Следовательно, на заряд $q/2$ в новой цепочке со стороны всех остальных зарядов (включая мысленно добавленный заряд $q/2^N$), будет действовать электростатическая сила $F/4$ (или, что то же самое, $T/4$). Значит, на заряд $q/2$ в исходной цепочке со стороны всех зарядов, кроме первого заряда q, действует электростатическая сила

$$F_1 = \frac{T}{4} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)\cdot(q/2^N)}{((N-1)a)^2}.$$

(она равна силе $T/4$, уменьшенной на величину модуля силы взаимодействия заряда $q/2$ с мысленно добавлявшимся зарядом $q/2^N$).

На заряд $q/2$ в исходной цепочке действуют сила натяжения T участка нити между первым и вторым зарядом (направлена влево), сила F_1 электростатического взаимодействия заряда $q/2$ со всеми зарядами цепочки, кроме первого заряда q (направлена влево), сила f электростатического взаимодействия заряда $q/2$ с зарядом q (направлена вправо) и искомая сила T_{23}натяжения участка нити между вторым и третьим зарядом. Поскольку заряд $q/2$ находится в равновесии, то

$$T + F_1 = f + T_{23}.$$

Учитывая, что $f = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q \cdot q/2}{a^2}$, получим:

$$T_{23}=T+F_1-f=T+\frac{T}{4}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)\cdot(q/2^N)}{((N-1)a)^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot q/2}{a^2}=\frac{5T}{4}-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{2^N(N-1)^2}\right).$$

При *N* = 2015 получаем:

$$T_{23}(2015)=\frac{5T}{4}-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{2^{2015}\cdot 2014^2}\right)\approx\frac{5T}{4}-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2},$$

поскольку второе слагаемое в скобках ничтожно мало по сравнению с единицей.

Критерии оценивания

Найдена сила электростатического взаимодействия заряда $q/2$ с остальными зарядами3 балла
Записано условие равновесия заряда $q/2$ ....2 балла
Получен ответ для силы T_{23} в общем виде...3 балла
Рассчитана $T_{23}(2015)$ ....2 балла

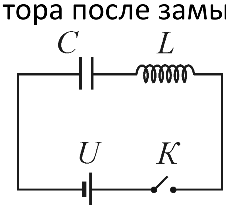
Задача 5

Автор

Паринов Д.А.

Условие

Из идеального источника напряжения с ЭДС U, конденсатора ёмкостью C, катушки с индуктивностью L и ключа K собрана цепь, схема которой приведена на рисунке. Изначально конденсатор не заряжен, а ключ разомкнут. Найдите максимальную силу тока в цепи и максимальный заряд конденсатора после замыкания ключа.



Решение

В момент, когда заряд конденсатора максимален, сила тока в цепи равна нулю. Значит и энергия магнитного поля в катушке равна нулю. Пусть заряд конденсатора в этот момент равен q. Энергия конденсатора равна работе, совершённой источником при зарядке конденсатора:

$$\frac{q^2}{2C} = Uq, \quad \text{откуда} \quad q = 2CU.$$

В момент, когда сила тока в цепи максимальна, напряжение на катушке равно нулю (поскольку напряжение на катушке пропорционально производной от силы тока по времени, а в точке экстремума производная равна нулю). Значит, заряд конденсатора в этот момент равен $q_1 = CU$. Пусть сила тока в цепи в этот момент равна I. Запишем закон сохранения энергии:

$$Uq_1 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}}U.$$

Критерии оценивания

Указано, что когда заряд конденсатора максимален, сила тока в цепи равна нулю.... 1 балл
Записан закон сохранения энергии для момента, когда сила тока в цепи равна нулю 1 балл
Найден максимальный заряд конденсатора.. 2 балл
Указано, что когда сила тока максимальна, напряжение на катушке равно нулю .... 1 балл
Найден заряд конденсатора в момент, когда сила тока максимальна......................... 1 балл
Записан закон сохранения энергии для момента, когда сила тока максимальна .... 2 балл
Найдена максимальная сила тока .... 2 балл

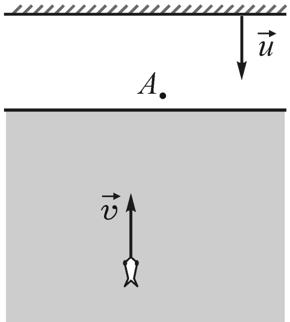
Задача 6

Автор

Бычков А.И.

Условие

Маленькая рыбка плывет к стенке аквариума со скоростью v. Параллельно стенке аквариума расположено плоское зеркало, которое перемещается со скоростью u в сторону аквариума (см. рисунок). Чему равна скорость изображения рыбки в зеркале с точки зрения наблюдателя, находящегося в точке A, и с точки зрения рыбки? Показатель преломления воды n, стенки аквариума тонкие и прозрачные.



Решение

Пусть d— расстояние от рыбки до стенки аквариума, а h — расстояние от стенки аквариума до зеркала (см. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Рассмотрим два луча, исходящие из точки, где находится рыбка. Один луч падает на стенку перпендикулярно, а второй под углом α. Поскольку в глаз рыбки (как и в глаз наблюдателя) попадают только те лучи, для которых угол α мал, можно считать, что $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$. Запишем закон преломления света:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n \approx \frac{\beta}{\alpha},$$

откуда следует, что преломившиеся лучи выйдут из точки, находящейся на расстоянии d/n от стенки аквариума. Значит, изображение рыбки в зеркале будет находиться на расстоянии $h + d/n$ от зеркала. Для наблюдателя в точке A скорость изображения будет равна

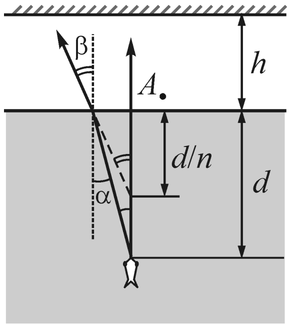
$$v_1 = \frac{d}{dt}\left(h + \frac{d}{n}\right) = -\left(u + \frac{v}{n}\right).$$

Знак минус означает, что изображение будет двигаться к наблюдателю.

Чтобы найти скорость изображения с точки зрения рыбки, нужно рассмотреть преломление отражённых от зеркала лучей. Расстояние от изображения до стенки аквариума равно $2h + d/n$, а кажущееся расстояние (при рассматривании изображения рыбкой из воды) будет в n раз больше и равно $2nh + d$. Значит, для рыбки скорость изображения равна

$$|v_2| = (2nu + v) + v = 2(nu + v).$$

В последней формуле учтено движение самой рыбки навстречу изображению со скоростью v.



Критерии оценивания

Записан закон преломления .... 1 балл

Использовано параксиальное приближение .... 1 балл

Найдено расстояние от зеркала до изображения рыбки ....2 балла

Найдена скорость v_1 ....2 балла

Найдено расстояние от стенки до изображения, с точки зрения рыбки ....2 балла

Найдена скорость v_2 ....2 балла