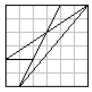
7 класс

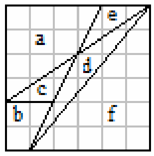
1. Компьютерный салон объявил о продаже гаджетов нового поколения. За несколько часов до открытия выстроилась очередь. Из каждого поезда метро между любыми двумя уже стоящими соседями влезало в очередь по одному человеку (а больше никто в очередь не становился). После второго поезда в очереди стало 333 человека. А сколько человек было до первого поезда?

Ответ. 84. **Решение.** Если в очереди вначале стояло x человек, то между ними был $x–1$ промежуток. Поэтому после первого поезда в очереди стало $x+(x–1)=2x–1$ человек. Аналогично, после второго поезда стало $2x–1 +(2x–2)=4x–3$ человека. Решая уравнение $4x–3=333$, находим $x=84$ человека.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов.



2. Плоский квадратный торт разрезан на 6 кусков. Разделите эти куски между Малышом и Карлсоном так, чтобы торта обоим досталось поровну (то есть суммарная площадь кусков у обоих была одинакова).



Решение. Пусть сторона клетки равна 1. Для удобства обозначим куски буквами как на рисунке. Заметим, что площадь прямоугольного треугольника с катетами m и n равна $mn/2$ клеток, так как такой треугольник – половинка прямоугольника со сторонами m и n. Площадь каждого из кусков можно вычислить, представив его как сумму или разность таких треугольников или прямоугольников. Так, a разбивается на прямоугольник 2×3 и два треугольника: с катетами 1 и 2 и с катетами 2 и 3, поэтому площадь a равна 10. Площадь $b=3$: сумма прямоугольника 1×2 и треугольника с катетами 1 и 2. Площадь $c=2$: разность треугольников с катетами 3 и 2 и с катетами 1 и 2. Площадь e тоже 2: треугольники c и e равны. Площадь $f=15$: треугольник с катетами 5 и 6. Теперь нетрудно найти, что площадь $d=4$: из площади квадрата 6×6 вычитаем площади всех остальных кусков. Половина площади квадрата равна 18. Если Карлсону достался кусок f, то ему можно добавить только b, а куски a, c, d и e достаются Малышу.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов.

3. От двух игрушечных азбук осталось всего 14 букв. Каждая буква первой азбуки тяжелее любой буквы из второй, но если буквы взяты из одной и той же азбуки, то весят поровну. Известно, что составленное из этих букв слово **ЦИРКУЛЬ** легче, чем слово **ЧАСТНОЕ**, слово **ЧАСТЬ** легче, чем **КРЕСТ**, а буква **Е** легче **Ь**. Определите все тяжёлые буквы.

Ответ. СТРОНЬК. **Решение.** Выкинув из слов ЧАСТЬ и КРЕСТ общие буквы С и Т, получим, что АЧЬ легче КРЕ. Значит, в КРЕ тяжелых букв больше, чем в АЧЬ. Но в КРЕ тяжёлых букв не более двух (Е – лёгкая), а в АЧЬ – не менее одной (Ь – тяжёлая). Значит, К и Р –тяжёлые, а А и Ч – лёгкие. Аналогично, в слове ЧАСТНОЕ тяжёлых букв больше, чем в слове ЦИРКУЛЬ. Но в ЧАСТНОЕ их не более четырёх (А,Ч, Е – лёгкие), а в ЦИРКУЛЬ –не менее трёх – К, Р и Ь. Значит, в слове ЧАСТНОЕ ровно 4 тяжёлые буквы, а в слове ЦИРКУЛЬ – ровно 3, откуда ответ.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов.

4. Из десяти различных цифр составили два трёхзначных и одно четырёхзначное число. Эти три числа перемножили. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение?

Ответ. На 6 нулей. **Решение.** *Пример:* $3125·640·789=1578000000$. *Оценка*. Число нулей в конце произведения не больше числа пятёрок в разложении произведения на простые множители. Эти пятёрки приходят из разложения кратных пяти сомножителей. Но такие сомножители оканчиваются только на 0 и на 5. Так как цифры не повторятся, то таких сомножителей один или два. Из одного сомножителя придёт не более пяти пятёрок, так как $5^6=5^3\cdot5^3=125\cdot125>10000$ – число, дающее 6 и более пятёрок как минимум пятизначно. Если два сомножителя кратны пяти, то один оканчивается на 5, а другой – на 0. Но цифры не повторяются, значит, другой сомножитель не оканчивается ни на 00, ни на 50, то есть на 25 не делится. Значит, из другого сомножителя в разложение произведения попадёт не более одной пятёрки, а всего – не более 6 пятёрок.

Критерий. Верный ответ и пример – не менее 3 баллов.

5. По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть, между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

Решение. Пройдём по кругу, шагая через одно число. Из-за нечётности, пройдя круг первый раз, мы число, с которого начали, пропустим. Но продолжая, к концу второго круга мы за 77 шагов «наступим» на каждое из чисел ровно по разу и вернёмся на число, с которого начали. Шагая с числа a на число b, мы перешагиваем через их общего соседа. Поэтому одно из чисел a и b делится на другое. Значит, каждый раз мы шагаем с некоторого числа либо на его делитель, либо на его кратное. Поскольку общее число шагов нечётно, мы не можем каждый раз чередоваться: на делитель, на кратное, на делитель… Найдутся два однотипных шага подряд. Можно считать, что мы два раза подряд шагнули на делитель (иначе пройдём в обратную сторону). Итак, нашлись 5 подряд записанных чисел a, b, c, d, e таких, что c делитель a, а e делитель c. Но тогда e – делитель a, и у них нет общего соседа, что и требовалось.

8 класс

1. От двух игрушечных азбук осталось всего 14 букв. Каждая буква первой азбуки тяжелее любой буквы из второй, но если буквы взяты из одной и той же азбуки, то весят поровну. Известно, что составленное из этих букв слово **ЦИРКУЛЬ** легче, чем слово **ЧАСТНОЕ**, слово **ЧАСТЬ** легче, чем **КРЕСТ**, а буква **Е** легче **Ь**. Определите все лёгкие буквы.

Решение и критерии. См. 7.3

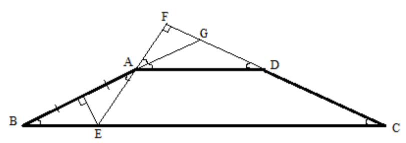
2. На экране компьютера записано натуральное число. Если стереть любую цифру, то оставшееся число разделится на 7. Докажите, что либо в записи числа нет троек, либо все его цифры – тройки.

Решение. Пусть N – исходное число. Выберем в N две цифры рядом (например, 3 и 5 в числе 73560). Пусть вычеркнув левую из них, получим число A (в примере 7560) а вычеркнув вместо этого из N другую из этих цифр, получим число B (в примере 7360). Как видим, A и B отличаются не более чем одной цифрой, и это – левая или правая цифра выбранной пары. Разность A–B (мы из большего вычитаем меньшее) равна круглому числу: первая цифра – разность цифр пары, а остальные – нули (в примере A–B=200). Но так как и A и B делятся на 7, то и A–B делится на 7. Однако круглое число делится на 7 только если его первая цифра делится на 7. Значит, разность цифр равна 7 (если они разные). Цифра 3 от любой другой цифры отличается меньше чем на 7. Значит, в числе N она может стоят только рядом с тройкой же. Но тогда и все остальные цифры – тройки.

Замечание. Условие задачи не требует приведения примера, но такой пример есть: N=3333333.

Критерий. Явно сформулировано, что разность соседних цифр делится на 7 – не менее 2 баллов. Если это доказано – не менее 5 баллов.

3. К боковой стороне AB равнобокой трапеции $ABCD$ провели серединный перпендикуляр. Он пересёк отрезок BC в точке E. Найдите угол ABC, если известно, что прямые AE и CD перпендикулярны.



Ответ. 30°. **Решение.** Ясно, что BC – длинное основание трапеции. Тогда чертёж такой – см. рис. Пусть прямая CD пересекает прямую AE в точке F, а прямую AB – в точке G. Получается много равных углов: $\angle B=\angle C$ так как трапеция равнобокая; $\angle B=\angle BAE$ так как в треугольнике ABE высота равна медиане, и значит, он равнобедренный; $\angle FAG=\angle BAE$ как вертикальные, $\angle DAG=\angle B$ и $\angle GDA=\angle C$ – как соответственные при параллельных прямых AD и BC. Тогда в треугольнике ADF сумма углов равна $3\angle B+90°=180°$, откуда $\angle B=30°$.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов.

4. По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть, между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

Решение. См. 7.5.

5. На свободные поля шахматной доски 8×8 по одному выставляли чёрных и белых слонов. Чёрный слон при выставлении бил чётное число ранее выставленных слонов любых цветов (в частности, мог не бить никого), а белый – нечётное. Так заполнили всю доску. Какое наименьшее число чёрных слонов могло быть выставлено? (Слоны бьют друг друга если стоят на одной диагонали и между ними нет других слонов)

Ответ. 8 слонов. **Решение.** Достаточно показать, что для белых клеток ответ 4. *Пример* см. на рисунке (чёрные слоны выделены жирным шрифтом, слоны выставляются по порядку номеров).

32		2		5		10	
	1		6		15		16
3		4		14		22	
	8		9		21		23
7		13		20		27	
	12		19		26		28
11		18		25		30	
	17		**24**		**29**		31

Оценка. Первый слон чёрный – он никого не бьёт. Далее, у нас есть три четвёрки клеток, образованных концами пар параллельных диагоналей одинаковой длины (на рисунке отмечены буквами A, B, C). Последний выставленный слон в каждой четверки будет побит ровно двумя слонами, значит, он – чёрный. Итого, будет как минимум 4 чёрных слона.

		A		B		C	
							C
A							
							B
B							
							A
C							
	C		B		A		

Критерий. Верный ответ и пример – не менее 3 баллов.

9 класс

1. Дано натуральное число, кратное 495. Между его цифрами вставили два нуля подряд. Докажите, что полученное число тоже делится на 495.

Решение. Пусть справа от вставки n цифр, группа цифр справа от вставки образует число B, а слева от вставки – число A (например, при превращении 2014 в 201004 A=201, B=4, n=1). Тогда исходное число было равно 10^nA+B, новое число стало равно $10^{n+2}A+B$, добавка составила $(10^{n+2}–10^n)A=99A\cdot10^n$. Так как $n\geq1$, то добавка делится на 990, и поэтому делится на 495. Новое число складывается из старого и добавки, каждое из слагаемых делится на 495, поэтому и новое число делится на 495.

Критерий. Доказано, что полученное число делится на 5: 1 балл. Доказано, что оно делится на 9 – ещё 2 балла.

2. Фома и Ерёма делят палку колбасы по такому правилу. Сначала Фома режет палку на две части разного веса. Затем Ерёма режет одну из частей на две так, чтобы веса всех трёх кусков были различны. Из трёх полученных кусков Ерёма берёт средний по весу, а остальные два куска достаются Фоме. Какую наибольшую долю колбасы может себе гарантировать Фома при любых действиях Ерёмы?

Ответ. 2/3. **Решение.** Назовём треть веса колбасы *фунтом*. Покажем, как Фома может получить не менее 2 фунтов. Сначала он делит колбасу на кусок A в 1 фунт и кусок B в 2 фунта. Если Ерёма разделит B, то получатся части весом больше фунта и меньше фунта, поэтому Ерёме достанется кусок A в 1 фунт, а Фоме – остальное. Если же Ерёма разделит кусок A, то кусок B останется самым большим и достанется Фоме, то есть Фома получит даже больше 2 фунтов.

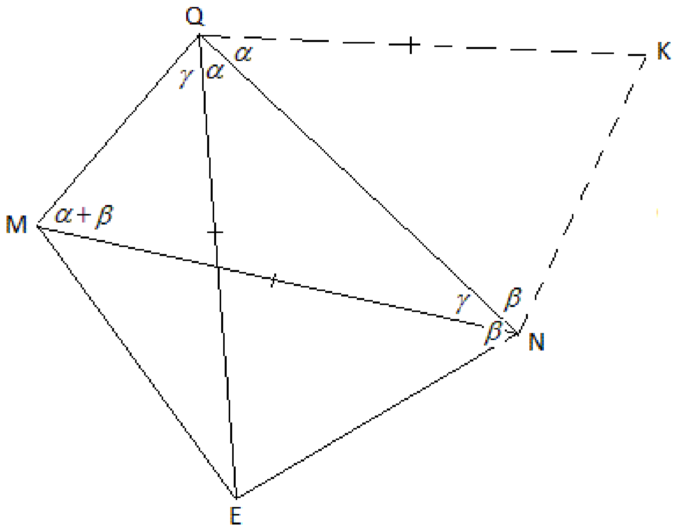
Покажем, как Ерёма обеспечит себе не менее фунта. Когда Фома разрежет колбасу на два куска, Ерёма посмотрит, есть ли среди них кусок в 1 фунт. Если есть, то он режет другой кусок на две части. Если нет, то Ерёма от большего куска отрезает 1 фунт. В обоих случаях получаться три куска: меньше фунта, ровно фунт и больше фунта, и Ерёме достанется 1 фунт.

Критерий. Верный ответ 1 балл. Ответ+Правильная и обоснованная стратегия за одно из игроков: 3 балла.

3. По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть, между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

Решение. См. 7.5.

4. На сторонах угла с вершиной Q отмечены точки M и N, а внутри угла – точка E так, что $QE=MN$, $\angle MQE = \angle QNM$, $\angle EQN + \angle QNE = \angle QMN$. Найдите $\angle MQN$.

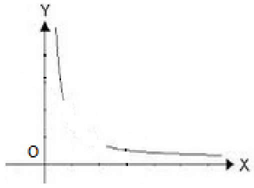


Решение. Пусть $\angle EQN =\alpha$, $\angle QNE =\beta$, $\angle MQE = \angle QNM=\gamma$. Тогда по условию $\angle QMN=\alpha+\beta$, а в треугольнике QEN $\angle QNE =180°–\alpha–\beta$. Отразим треугольник QEN симметрично относительно прямой QN, и пусть точка Q перейдёт в точку K

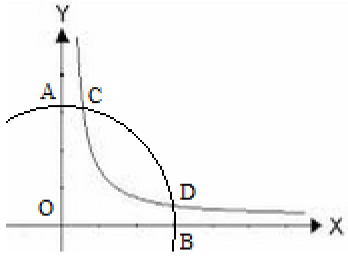
(см. рис.). Так как $\angle QMN+\angle QKN = \angle QMN+\angle QEN = 180°$, то четырёхугольник $MQKN$ – вписанный. Поскольку $QK=QE=MN$, то в описанной окружности равные хорды QK и MN стягивают равные дуги, поэтому равны и опирающиеся на них вписанные углы: $\angle QNK = \angle MQN$, то есть, $\beta=\gamma+\alpha$. Сумма углов треугольника MQN равна $2\alpha+2\gamma+\beta=3\beta$, откуда $\angle MQN=\beta=60°$.

Критерий. Верный ответ 1 балл.

5. На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y=\dfrac{2}{x}$ при $x>0$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. К сожалению, небольшой кусок графика вблизи начала координат был нечаянно стёрт (см. рис.) С помощью циркуля и линейки восстановите на данном графике точку с абсциссой 1.



Решение. *Лемма*. Пусть окружность с центром в начале координат пересекает положительную полуось Oy в точке A, полуось Ox в точке B, положительную ветвь графика – в точках C и D (см. рис). Тогда $AB^2–CD^2=4$.



Доказательство леммы. Пусть координаты точки $C(x, 2/x)$.
Так как точка D симметрична C относительно биссектрисы первого квадранта, то $D(2/x, x)$,
$CD^2=(x–2/x)^2+(2/x–x)^2=2x^2–4+8/x^2$, а $AB^2=OA^2+OB^2=2OC^2=2(x^2+4/x^2)$ и $AB^2–CD^2=4$.

Построение. Проведём произвольную окружность радиуса больше 3, которая пересечёт положительную ветвь графика в двух точках. Обозначим точки пересечения с графиком C и D, а точки пересечения с осями – A и B (см. рис.). Отложим на полуоси Ox отрезок $OM=CD$. Проведём окружность с центром M и радиусом AB. Так как $AB>CD$, то окружность пересечёт полуось Oy в некоторой точке N. По построению $ON^2=AB^2–CD^2=4$, то есть $ON=2$. Теперь мы знаем масштаб, и можем отложить на оси Ox точку с ординатой 1, а на Oy – точку с ординатой 2. Восставив перпендикуляры к осям в этих точках, получим на их пересечении искомую точку.

Критерий. Восстановлен масштаб – не менее 4 баллов.

10 класс

1. Дано натуральное число, кратное 495. Между его цифрами вставили два нуля подряд. Докажите, что полученное число тоже делится на 495.

Решение и критерии. См. 9.1.

2. На клетчатой доске $2k\times2k$ расставили n белых и n черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем n такое возможно?

Ответ. При $n=k^2$. **Решение.** *Пример*: Заполним ладьями два квадрата $k\times k$, примыкающие к противоположным углам доски. *Оценка.* Если $n>k^2$, то пусть белые ладьи стоят на h горизонталях и v вертикалях. Тогда $v\cdot h>k^2$, значит, по неравенству о средних, $v+h>2k$. То же верно для черных ладей, поэтому общее число занятых вертикальных и горизонтальных рядов больше $4k$. Значит, какой-то ряд занят дважды, то есть на нём есть и белые и чёрные ладьи. Там и найдутся бьющие друг друга ладьи.

Критерий. Верный ответ 1 балл. Ответ+пример 2 балла.

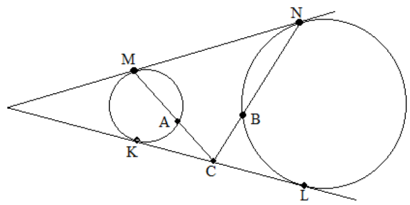
3. На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y=\dfrac{2}{x}$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. С помощью циркуля и линейки постройте на данном графике точку, у которой абсцисса положительна и на 2 меньше ординаты.

Решение. Пусть O – начало координат. Биссектриса первого координатного угла пересекает положительную ветвь графика в точке M($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$). Расстояние OM=2. Отложим на оси Oy отрезок OK=OM. Проведём через точку K прямую, параллельную биссектрисе первого координатного угла. Её уравнение y=x+2, поэтому её пересечение с положительной ветвью графика и будет искомой точкой.

Критерий. Восстановлен масштаб – не менее 3 баллов.

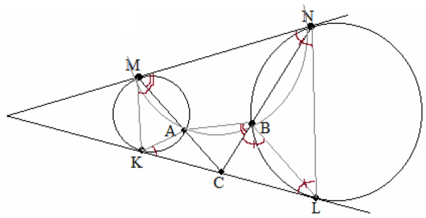
4. В угол вписаны две непересекающиеся окружности. Одной стороны угла они касаются в точках K и L, другой – в точках M и N (см. рис.), C – середина отрезка KL, A и B – точки пересечения отрезков CM и CN с окружностями. Докажите, что

а) точки A, B, M и N лежат на одной окружности.



б) точки A, B, K и L лежат на одной окружности.

Решение. а) По теореме о секущей и касательной $CA\cdot CM=CK^2$, $CB\cdot CN=CL^2$, поэтому $CA\cdot CM= CB\cdot CN$. Пусть N' – вторая точка пересечения луча CB с описанной окружностью треугольника MAB. Тогда $CA\cdot CM= CB\cdot CN'$, откуда $CN=CN'$. Значит, точки N и N' совпадают, то есть, четырёхугольник $MANB$ – вписанный (см. рис.).



б) В силу симметрии $MNLK$ – равнобочная трапеция.

Возникает много равных углов. $\angle AKC=\angle AMK$ – оба измеряются половиной дуги KA окружности AKM. Аналогично, $\angle BLC=\angle BNL$. $\angle ABC=180°-\angle ABN =\angle AMN$, так как четырёхугольник $MABN$ – вписанный. $\angle CBL=\angle BNL+\angle BLN = \angle BLC +\angle BLN = \angle CLN$.

Теперь посчитаем сумму противоположных углов в четырёхугольнике *KABL*. $\angle AKC+\angle ABL=\angle AKC+\angle ABC+\angle CBL=\angle AMK+\angle AMN+\angle CLN=\angle KMN+\angle MNL=180^\circ$ – как сумма углов при боковой стороне трапеции. Значит, четырёхугольник *KABL* – вписанный.

Критерий. Решена только (а) 3 балла.

5. Пусть x, y, $\frac{x+3}{y}+\frac{y+3}{x}$ и $\frac{x^2+3}{y}+\frac{y^2+3}{x}$ – целые числа. Докажите, что тогда и число $\frac{x^3+3}{y}+\frac{y^3+3}{x}$ – целое.

Решение. Обозначим $m=\frac{x+3}{y}+\frac{y+3}{x}$, $n=\frac{x^2+3}{y}+\frac{y^2+3}{x}$, $c=\frac{x^2-x}{y}$, $d=\frac{y^2-y}{x}$. Заметим, что c+d=n–m – целое. Но тогда целое и (x+y)(c+d) = (cx+dy)+(cy+dx). Однако cy+dx = x^2–x+y^2–y – целое, поэтому и cx+dy = $\frac{x^3-x^2}{y}+\frac{y^3-y^2}{x}$ – целое. Но тогда и $\frac{x^3+3}{y}+\frac{y^3+3}{x}$ = cx+dy+n – целое. Так как x и y – целые, то числа c и d рациональны. Заметим, что $c+d=m$ – целое, и $cd=(x+1)(y+1)$ – целое. Тогда, по лемме, c и d – тоже целые. А $n = cx+dy$, поэтому тоже целое.

11 класс

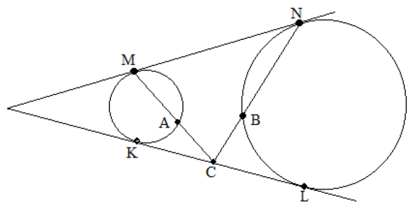
1. Решите уравнение $[x]\{x\} = x^2$. (Здесь $[x]$ – целая часть, а $\{x\}$ – дробная часть числа x.)
Ответ. $x=0$. **Решение.** Значение $x=0$, очевидно, подходит. Если $x\neq 0$, то и $\{x\}\neq 0$, и $[x]\neq 0$. А так как $x^2>0$ и $\{x\}>0$, то и $[x]>0$. Но тогда $x>1$, $x^2>x>[x]> [x]\{x\}$ (последнее следует из того, что $\{x\}<1$). Поэтому других решений нет.

2. Разделите равнобедренный прямоугольный треугольник на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из высот второго треугольника.
Решение. Пусть AB – гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Отметим на ней такую точку K, что $AK=3BK$. Высота CH треугольника ACK делит AB пополам. Тогда K – середина BH. Медиана KM треугольника KBC будет средней линией треугольника BCH и поэтому параллельна высоте CH.

3. На клетчатой доске $(2k+1)\times(2k+1)$ расставили n белых и n черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем n такое возможно?
Ответ. При $n=k^2+k$. **Решение.** *Пример*: Заполним ладьями два прямоугольника $(k+1)\times k$, примыкающие к противоположным углам доски и ориентированные по-разному.

Оценка. Если $n> k^2+k$, то пусть белые ладьи стоят на h горизонталях и v вертикалях. Тогда $v\cdot h>k^2+k$, то есть $v\cdot h\geq k^2+k+1$. По неравенству о средних, $v+h\geq 2\sqrt{vh}\geq\sqrt{4k^2+4k+4}>2k+1$. То же верно для черных ладей, поэтому общее число занятых вертикальных и горизонтальных рядов больше $4k+2$. Значит, какой-то ряд занят дважды, то есть на нём есть и белые и чёрные ладьи. Там и найдутся бьющие друг друга ладьи.

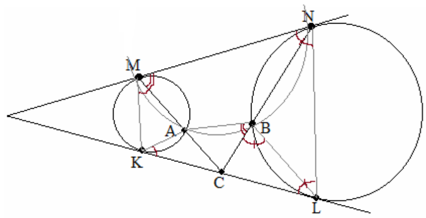
4. В угол вписаны две непересекающиеся окружности. Одной стороны угла они касаются в точках K и L, другой – в точках M и N (см. рис.), C – середина отрезка KL, A и B – точки пересечения отрезков CM и CN с окружностями. Докажите, что



а) точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

б) точки A, B, K и L лежат на одной окружности.

Решение. а) По теореме о секущей и касательной $CA\cdot CM=CK^2$, $CB\cdot CN=CL^2$, поэтому $CA\cdot CM= CB\cdot CN$. Пусть N' – вторая точка пересечения луча CB с описанной окружностью треугольника MAB. Тогда $CA\cdot CM= CB\cdot CN'$, откуда $CN=CN'$. Значит, точки N и N' совпадают, то есть, четырёхугольник $MANB$ – вписанный (см. рис.).



б) В силу симметрии $MNLK$ – равнобочная трапеция.

Возникает много равных углов. $\angle AKC=\angle AMK$ – оба измеряются половиной дуги KA окружности AKM. Аналогично, $\angle BLC=\angle BNL$. $\angle ABC=180°-\angle ABN=\angle AMN$, так как четырёхугольник $MABN$ – вписанный. $\angle CBL=\angle BNL+\angle BLN = \angle BLC+\angle BLN = \angle CLN$.

Теперь посчитаем сумму противоположных углов в четырёхугольнике $KABL$. $\angle AKC+\angle ABL=\angle AKC+\angle ABC+\angle CBL=\angle AMK+\angle AMN+\angle CLN = \angle KMN+\angle MNL = 180°$ – как сумма углов при боковой стороне трапеции. Значит, четырёхугольник $KABL$ – вписанный.

5. Пусть *x*, *y*, $\frac{x+5}{y}+\frac{y+5}{x}$ и $\frac{x^2+5}{y}+\frac{y^2+5}{x}$ – целые числа. Докажите, что тогда и число $\frac{x^5+5}{y}+\frac{y^5+5}{x}$ – целое.

Решение. Обозначим $m=\frac{x+5}{y}+\frac{y+5}{x}$, $n=\frac{x^2+5}{y}+\frac{y^2+5}{x}$, $c=\frac{x^2-x}{y}$, $d=\frac{y^2-y}{x}$. Заметим, что $c+d=n-m$ – целое. Обозначим $e_n = cx^n + dy^n = \frac{x^{n+2}-x^{n+1}}{y}+\frac{y^{n+2}-y^{n+1}}{x}$. Докажем, что e_n целое при всех натуральных n. Действительно, $e_n = cx^n + dy^n = (x^n+y^n)(c+d) - (cy^n+dx^n)$. Первое слагаемое целое, поскольку оба сомножителя целые. А $cy^n+dx^n = (x^2-x)y^{n-1}+(y^2-y)x^{n-1}$. Чтобы завершить решение задачи, достаточно заметить, что $\frac{x^5+5}{y}+\frac{y^5+3}{x} = e_3+e_2+e_1+n$.

6. На квадратной пластинке со стороной 1 см сидит вирус-невидимка Вася. Он и доктор Петя ходят по очереди. Очередным *n*-м ходом Петя рисует вакциной как чернилами отрезок длиной 1 микрон, а затем Вася должен выбрать направление и проползти в этом направлении *по прямой* расстояние 1/*n* микрона (не выходя за край пластинки). Если Вася проползёт через любую из точек с вакциной или коснётся её, он погибнет. Петя может действовать с любой точностью. Может ли он за конечное число ходов наверняка погубить вирус?

Ответ. Может. **Решение.** Разобьем мысленно квадрат на клетки со стороной 0,2 микрона и будем сериями ходов последовательно исключать по одной клетке. Очередная клетка к этому ходу должна быть слева и снизу ограничена краями квадрата или проведенными отрезками. Первой серией из двух ходов отрежем левую нижнюю клетку. Ее диагональ $0{,}2\sqrt{2} < 0{,}5$ микрона, и если вирус там – он выйдет за пределы клетки и погибнет. Пусть Петя уже исключил несколько клеток, сделав *k* ходов. Следующими 2*k* ходами он проведем *k* вертикальных и *k* горизонтальных отрезков, отгородив очередную клетку и разбив ее на квадратики со стороной 0,2/*k* микрон. Диагональ такого квадратика короче длины очередного хода Васи: 0,2/*k* < 1/3*k*, поэтому если Вася оказался в клетке, то он погибнет. Но всего клеток конечное число, поэтому рано или поздно Вася погибнет.