

ОЛИМПИАДА «КУРЧАТОВ» — 2013

Интернет-этап по математике

Мы приглашаем вас принять участие в интернет-этапе по математике олимпиады «Курчатов». Задания ориентированы на учащихся 6–11 классов, впрочем, порешать понравившиеся задачи более старших (и более младших) классов тоже можно.

В каждой задаче требуется привести только ответ (решение записывать не нужно).

Пользование интернет-ресурсами не только не запрещается, но и приветствуется: если для решения вам потребуется какая-то информация, попробуйте найти ее в книжках или в интернете. В конце концов, умение быстро найти нужную информацию — очень важное качество для ученого (наверное, не менее важное, чем хорошая память).

Желаем успеха!

6—7 КЛАССЫ

Задача 1. $2030405040302x = 26395265523926$. Найдите x . [2 балла]

Задача 2. Лесоруб одним ударом топора разбивает любой чурбак или полено на три части. Он хочет разбить чурбак на 33 части. Сколько ударов ему понадобится? [2 балла]

Задача 3. Саше сейчас меньше 60 лет. 5 лет ему исполнилось во вторник. А в какой день недели Саше исполнилось 45 лет? [2 балла]

Задача 4. В поп-группе «Дубинушки InterRussia» участвует семья Онучкиных: Илья Ильич, Илья Лукич, Лука Ильич, Лука Лукич, Лука Фомич, Фома Ильич и Фома Лукич. Главный у них поёт, его папа крутит ручку шарманки, братья таскают усилитель, а трое сыновей стучат в бубен. Какое имя-отчество у певца? [3 балла]

Задача 5. Впишите недостающие знаменатели (целые числа) так, чтобы все знаменатели были разными и равенство было верным: $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$. [4 балла]

Задача 6. Отметь в каждом из слов этой задачи ровно по одной букве, но так, чтоб все до одной отмеченные буквы были бы разными. [5 баллов]

Задача 7. На необитаемый арктической остров выгрузили вездеход и 300 л горючего. Вездеход должен добраться до зимовки, до неё 120 км. Вездеход может везти (в баках и канистрах) не более 120 л горючего, расходуя при этом по литру на километр пути. Можно ездить туда-сюда, выгружая и подбирая горючее по мере необходимости. Какое наибольшее количество горючего (в литрах) вездеход сможет доставить на зимовку? [6 баллов]

Задача 8. На сколько частей распадется клетчатый квадрат 30×30 , если каждую его клетку разрезать по обеим диагоналям? (На рис. 1 для примера нарисован так разрезанный квадрат 2×2 : он распадается на 12 частей). [7 баллов]

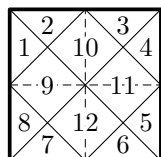


Рис. 1

Задача 9. У Пети есть 25 карточек с числами 1, 2, 3, ..., 25. Он давно посчитал, что сумма этих чисел равна 325. Как-то к Пете пришел Вася, взял несколько карточек и перемножил числа на них. А Петя сложил числа на оставшихся карточках. Мальчики получили одинаковые результаты. Приведите один пример карточек, которые мог взять Вася? [8 баллов]

Задача 10. Папа, мама и сын стартовали одновременно и ездят в одну сторону с постоянными скоростями по круговой велодорожке. Папа проезжает круг за полторы минуты, мама — за две минуты, сын — за 11 минут. У них есть на всех одна фляжка с водой, на старте она была у сына. Если кто-то с фляжкой обгоняет другого или его обгоняет другой, то фляжка передается другому. Езда прекратилась, когда все они одновременно снова оказались на линии старта. Сколько кругов сделала фляжка? [15 баллов]

8—9 КЛАССЫ

Задача 1. $60 : (6 - 60 : (60 + 600 : x)) = 6$. Найдите x . [2 балла]

Задача 2. В баскетбольном турнире участвовали 47 школьников из трех городов. Каждый забросил мяч хотя бы раз, а всего они забросили 50 мячей. Оказалось, что школьники из одного города забросили по одинаковому числу мячей, а школьники из разных городов — по неодинаковому. Сколько школьников забросили ровно по одному мячу? [3 балла]

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB биссектриса AL перпендикулярна медиане BM . Периметр треугольника LMC равен 99 см. Найдите периметр треугольника ABC (ответ укажите в сантиметрах). [3 балла]

Задача 4. Впишите вместо недостающих знаменателей натуральные числа меньше 100 так, чтобы равенство было верным: $\frac{1}{1} + \frac{1}{\quad} + \frac{1}{\quad} + \frac{1}{\quad} + \frac{1}{\quad} = \frac{1}{2}$ и все знаменатели были разными (достаточно одного набора чисел). [4 балла]

Задача 5. Бумажный квадрат 40×40 расчерчен на клетки со стороной 1. На сколько частей он распадется, если каждую его клетку разрезать по обеим диагоналям? (На рис. 2 для примера нарисован так разрезанный квадрат 2×2 : он распадается на 12 частей). [4 балла]

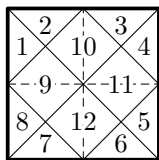


Рис. 2

Задача 6. Колонна мотоциклистов длиной 220 м едет по дороге со скоростью 80 км/ч, а навстречу им медленно едет полицейский патруль со скоростью 20 км/ч. Доехав до патруля, мотоциклист моментально разворачивается и едет назад с той же скоростью. Какова будет длина колонны (в метрах), когда все мотоциклисты развернутся? [5 баллов]

Задача 7. Неравнобедренный треугольник можно двумя способами разбить на два меньших равнобедренных треугольника, причем линия разбиения в обоих случаях проходит через одну и ту же вершину. Найдите наименьший угол исходного треугольника (в градусах). [5 баллов]

Задача 8. В ряд были выписаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 1004. Их выписали в другом порядке: сначала по возрастанию все те, которые делятся на 2 (то есть 2, 4, 6, 8, ...), затем все те из оставшихся, которые делятся на 3, тоже по возрастанию (то есть 3, 9, 15, ...), затем — по возрастанию оставшиеся делящиеся на 5, потом — на 7 и т. д. На последнее место записали число 1. Найдите самое маленькое число, которое осталось на том же месте. [7 баллов]

Задача 9. Хоббит обнаружил в логове дракона серебро и изумруды. У него есть только один мешок, куда помещается 70 фунтов серебра или 50 фунтов изумрудов. Серебро можно будет продать по 10 талеров за фунт, изумруды — по 12 талеров за фунт. Хоббит может заполнить мешок частично серебром, частично изумрудами, но вес в мешке должен быть не больше 55 фунтов — иначе не увезти. Какое наибольшее количество талеров он может получить за сокровища, которые привезет за один раз? [10 баллов]

Задача 10. Папа, мама и сын стартовали одновременно и ездят в одну сторону с постоянными скоростями по круговой велодорожке. Папа проезжает круг за полторы минуты, мама — за три с половиной минуты, сын — за восемь минут. У них есть на всех одна фляжка с водой, на старте она была у сына. Если кто-то с фляжкой обгоняет другого или его обгоняет другой, то фляжка передается другому. Езда прекратилась, когда все они одновременно снова оказались на линии старта. Сколько кругов сделала фляжка? [15 баллов]

10—11 КЛАССЫ

Задача 1. $(9 - 900 : (x - 99)) \cdot (99 + 900 : (x - 99)) : 99 = 9$. Найдите x . [2 балла]

Задача 2. В баскетбольном турнире участвовали 47 школьников из пяти городов. Каждый забросил мяч хотя бы раз, а всего они забросили 57 мячей. Оказалось, что школьники из одного города забросили по одинаковому числу мячей, а школьники из разных городов — по неодинаковому. Сколько школьников забросили ровно по одному мячу? [3 балла]

Задача 3. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, длина одной из них равна 15 см, а ее высота равна 12 см. Найдите площадь трапеции (в см^2). [3 балла]

Задача 4. Колонна мотоциклистов длиной 210 м едет по дороге со скоростью 72 км/ч, а навстречу им медленно едет полицейский патруль со скоростью 12 км/ч. Доехав до патруля, мотоциклист моментально разворачивается и едет назад с той же скоростью. Какова будет длина колонны (в метрах), когда все мотоциклисты развернутся? [4 балла]

Задача 5. Был лист обоев в форме квадрата со стороной 1 м. Его разрезали на прямоугольные куски. Оказалось, что площади всех кусков различны и измеряются целым числом квадратных сантиметров. Какое наибольшее количество кусков могло получиться? [5 баллов]

Задача 6. В открытии Олимпиады участвовали менее 2014 спортсменов, из них ровно $1/99$ часть — рекордсмены. Всех спортсменов построили прямоугольником. Оказалось, что рекордсмены есть не менее чем в 44% продольных рядов и не менее, чем в 44% поперечных. Сколько всего спортсменов? [5 баллов]

Задача 7. Стены цеха образуют прямоугольную коробку (рис. 3), указаны длина, ширина и высота (в метрах), а также расстояния от выключателя В и лампочки Л до ближайших рёбер. Надо соединить выключатель с лампочкой самым коротким проводом. Провод может идти по стенам, полу и потолку косо, но не должен висеть в воздухе. В ответе укажите наименьшую возможную длину провода в дециметрах (округлив, если необходимо, до целого). [7 баллов]

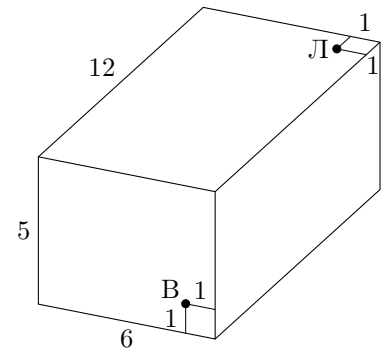


Рис. 3

Задача 8. У Пети были 404 карточки с числами 1, 2, 3, ..., 404. Карточка с числом 202 потерялась. Как-то к Пете пришел Вася, взял несколько карточек и перемножил числа на них. А Петя сложил числа на оставшихся карточках. Мальчики получили одинаковые результаты. Приведите один пример карточек, которые мог взять Вася. [7 баллов]

Задача 9. Хоббит обнаружил в логове дракона серебро, изумруды и сундук, в котором их можно унести. В сундук помещается 100 фунтов серебра или 30 фунтов изумрудов, сам сундук весит еще 5 фунтов. Серебро можно будет продать по 14 талеров за фунт, изумруды — по 35 талеров за фунт. Хоббит может заполнить сундук частично серебром, частично изумрудами, но увезти на своем пони может вес не более 75 фунтов. Какое наибольшее количество талеров он может получить за сокровища, которые привезет за один раз? [10 баллов]

Задача 10. По числу $a > 1$ (не обязательно целому) получаем 150-значное натуральное число, выписывая по порядку первые цифры чисел $1,5a, 1,52a, 1,53a, \dots, 1,5150a$. Сколько различных натуральных чисел можно так получить из всевозможных a ? [12 баллов]

Дополнительная задача (задача 11). По двум пересекающимся прямым движутся две точки с постоянными скоростями (возможно, не одинаковыми). Расстояние между ними было 17 м в 9.00, 13 м — в 9.30 и 11 м — в 10.00. А в какой момент расстояние между ними снова станет равным 17 м? [6 баллов]